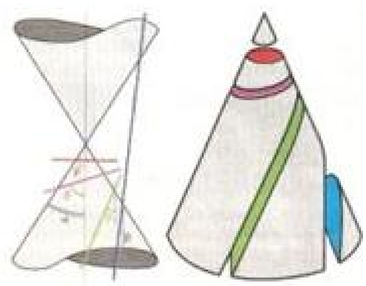
Construcción de cónicas

Última modificación: â25/5/2012 18:16:53)



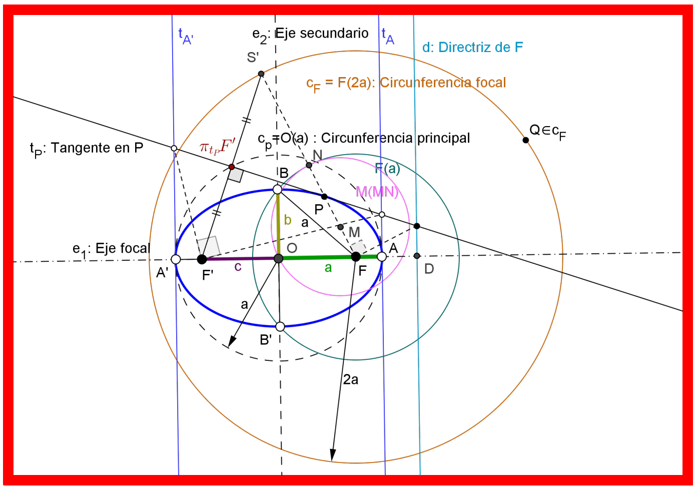
Rut Almeida
Elvira Espinosa
Elisa Guzmán
Angel Montesdeoca
José Agustín Noda

Notaciones

En una cónica se designa por:

2a: **longitud del eje focal (segmento)**	ek ó e_k : **uno de los ejes (recta), k=1 ó k=2**
2b: **longitud del eje secundario (segmento)**	F, F', F_1, F_2: **focos**
A, A': **vértices del eje focal**	h, h_1,h_2: **asíntotas de hipérbola**
B, B': **vértices del eje secundario**	I, I_1, I_2: **puntos del infinito de una cónica**
2c: **distancia focal**	O: **centro**
C: **cónica en general**	p: **distancia del foco al vértice en un parábola (parámetro)**
c_p ó c_p : **circunferencia principal**	P, P_1,P_2,...: **puntos en la cónica**
c_F ó c_F : **circunferencia focal del foco F**	S, S', S_1, S_2: **simétricos de los focos, respecto a una tangente**
C_e ó C_e: **elipse**	t, t_1,t_2,...: **tangentes a la cónica**
C_h ó C_h: **hipérbola**	t_P ó t_P: **tangente en P**

C_p ó C_p: **parábola**	Pi: **punto imaginario**
d: **directriz**	—— *Otras notaciones* ——
D, D', D_1, D_2: **punto de intersección del eje focal con la directriz correspondiente a los focos F, F', F_1, F_2**	ρ: **cierta razón entre magnitudes**
e ó ε: **excentricidad**	π_δQ ó $\pi_\delta Q$: **Proyección ortogonal del punto Q sobre la recta δ**
e1 ó e_1 : **eje focal (recta) o bien vector en la dirección del eje principal**	$M \in c_F$: **Punto en un objeto**
e2 ó e_2 : **eje secundario (recta)**	Q(r) : **Circunferencia de centro Q y radio r**
x : **Para indicar que el dato dado de la cónica no se puede expresar de forma clara con las notaciones usadas aquí.**	Q(MN) : **Circunferencia de centro Q y radio la longitud del segmento MN**



Introducción

Fue el matemático griego Apolonio (262-190 A.C.) de Perga el primero en estudiar detalladamente las cónicas y encontrar la propiedades que las definian.

Apolonio descubrió que las cónicas se podían clasificar en tres tipos a los que dio el nombre de: elipses, hipérbolas y parábolas:

Las elipses son las curvas que se obtiene cortando una superficie cónica con un plano que no es paralelo a ninguna de sus generatrices.

Las hipérbolas son las curvas que se obtiene al cortar una superficie cónica con un plano que es paralelo a dos de sus generatrices.
Las parábolas son las curvas que se obtienen al cortar una superficie cónica con un plano paralelo a una sola generatriz.
Debido a estas caracterizaciones a las cónicas se llaman a veces secciones cónicas.

En el siglo XVI el filósofo y matemático René Descartes (1596-1650) relacionó las curvas con ecuaciones relativas a un sistema de coordenadas; es lo que se conoce como Geometría Analítica. En la Geometría Analítica las cónicas se pueden representar por ecuaciones algebraicas de segundo grado y, recíprocamente, todas las ecuación de segundo grado en dos variables representa sección cónica. El astrónomo alemán Johannes Kepler (1570-1630) descubrió que las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elipses con el Sol en uno de sus focos. Para La Tierra, la excentricidad es 0.017 y los demás planetas varían desde 0.004 de Neptuno a 0.250 de Plutón. El matemático y físico inglés Isaac Newton (1642-1727) demostró que la órbita de un cuerpo alrededor de una fuerza de tipo gravitatorio es siempre una cónica.

Existe una caracterización proyectiva de las cónicas, debida a Steiner, como el lugar geométrico de los puntos de intersección de pares de rayos homólogos en una proyectividad entre haces.

Definiciones

1. Una elipse es el lugar geométrico de los puntos P cuya suma de distancias a dos puntos fijos, F y F' llamados focos, es constante (igual a 2a).
2. Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos P cuya diferencias de distancias (en valor absoluto) a dos puntos fijos, F y F' llamados focos, es constante (igual a 2a).
3. Una parábola es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto, llamado foco, y de una recta d, llamada directriz.

4. La excentricidad es un parámetro que determina el grado de desviación de una sección cónica con respecto a una circunferencia. Es el cociente entre las distancias de cualquiera de sus puntos al foco y a la directriz (e=c/a).
5. En una elipse o hipérbola, la circunferencia con centro O, el de la cónica, y radio la semilongitud del eje focal, a, se denomina circunferencia principal, y es tangente a la cónica en sus vértices.
6. En una elipse o hipérbola, la circunferencia con centro en un foco y radio la longitud del eje focal, 2a, se denomina circunferencia focal, relativa a dicho foco.

Propiedades de cónicas

1. El simétrico de un foco respecto de toda tangente a una elipse o hipérbola está sobre la circunferencia focal con centro el otro foco.

2. El simétrico del foco de una parábola respecto de toda tangente, está en la directriz.
3. El segmento de tangente a una cónica comprendido entre el punto de contacto y una directriz, se ve desde el foco correspondiente según un ángulo recto.
4. Dados dos puntos P_1 y P_2 y una recta d, el lugar geométrico de los focos de las cónicas con directriz correspondiente d y que pasan por P_1 y P_2, es la circunferencia de Apolonio de P_1 y P_2 y razón $k=MP_1/MP_2$, siendo M el punto en el que la recta P_1P_2 corta a d.
5. En una elipse, sea F un foco, P un punto sobre ella y designamos por M el punto medio de FP, entonces la circunferencia de centro en M y tangente a la circunferecia F(a), de centro en F y radio a (longitud del semieje focal), pasa por el centro O de la elipse. (Mostrar/Ocultar figura)

   Ver la construcción con GeoGebra
6. En una hipérbola, la paralela al eje focal por uno de sus puntos P, corta a las asíntotas en los puntos M (el más cercano a P) y en N (el más alejado de P), entonces una cualquiera de las semicircunferencias de diámetro PN y la recta perpendicular al eje focal por el punto M se cortan en en un punto Q, tal que PQ=a (longitud del semieeje focal).
7. En una parábola, la tangente t en un punto P corta a la tangente t_A, en su vértice A, en el punto medio de AQ, siendo Q la proyección ortogonal de P sobre t_A.
8. Más en general, en una parábola, la tangente t en un punto arbitrario corta a la tangente t_P (en P) en el punto medio M de PQ, siendo Q el punto de intersección de t_P con la recta paralela al eje por el punto de tangencia de t.
9. Las tangentes trazada desde un punto a una cónica son rectas isogonales de las rectas que unen dicho punto con los focos.
10. Toda parábola inscrita en un triángulo tiene su foco en la circunferencia circunscrita al triángulo.

11. Una elipse es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por un punto fijo (foco) y tangentes interiormente a una fija (circunferencia focal del otro foco). (Mostrar/Ocultar figura)

    Ver la construcción con GeoGebra
12. Una hipérbola es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por un punto fijo (foco) y tangentes exteriormente a una fija (circunferencia focal del otro foco). (Mostrar/Ocultar figura)

    Ver la construcción con GeoGebra
13. Una parábola es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a una recta fija (directriz) y que pasan por un punto exterior (foco). (Mostrar/Ocultar figura)

    Ver la construcción con GeoGebra
14. El lugar geométrico de las proyecciones ortogonales de un foco sobre las tangentes a una elipse o hipérbola es la circunferencia principal. (Mostrar/Ocultar figura)

    Ver la construcción con GeoGebra

87. $t_pt_pC_p$

88. ttt_AC_p

89. $tt\rho C_p$

90. $tttC_p$

91. $tttt_p$

92. ttttt

15. El lugar geométrico de las proyecciones ortogonales de un foco sobre las tangentes a una parábola es la tangente en el vértice.
16. Una cónica es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la razón de sus distancias a un punto fijo, llamado foco, y a una recta fija, llamada directriz es constante. Esta constante se llama excentricidad.

17. La polar de un foco es la directriz correspondiente.

18. Teorema de Pascal: "Si un hexágono se encuentra inscrito en una cónica, los tres puntos en los que se intersecan los lados opuestos están sobre una recta, denominada la recta de Pascal". (Mostrar/Ocultar figura)

Ver la construcción con GeoGebra

19. Teorema de Brianchon: "Si un hexágono se encuentra circunscrito en una cónica, las tres rectas que unen vértices opuestos se intersecan en un punto, denominado punto de Brianchon". (Mostrar/Ocultar figura)

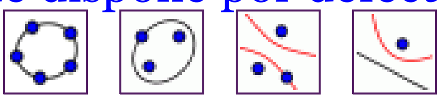
Ver la construcción con GeoGebra

Referencias

1. Romeo Barbieri.- Dibujo Técnico (http://www.zonabarbieri.com/indexProbgeneral.html) (Consultada 24-05-2012)
2. Michel Bataille.- A Unified Construction of Conics. The Mathematical Gazette, Vol. 86, No. 507, Nov., 2002 (pp.408-414) (http://www.jstor.org/stable/10.2307/3621132)
3. Quim Castellsaguer.- Todo Triágulos Web (Construcciones) (http://www.xtec.cat/~qcastell/ttw/ttwesp/portada.html) (Consultada 24-05-2012)
4. Antonio Castilla.- TRAZOIDE. Dibujo técnico, geometría y CAD. (http://trazoide.com/forum/index.php) (Consultada 24-05-2012)
5. Philippe Chevanne.- MATHS en folie. Recueil de divertissements mathématiques (http://mathafou.free.fr/themes/coniques.html) (Consultada 24-05-2012)
6. Roger Cuppens.- Faire de la Géomètrie Supérieure en jount avec Cabri-Géomètre II (2 tomes). Brochures de APMEP. Paris (http://www.apmep.asso.fr)
7. Michael Fox.- Constructions for Sketchpad (http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/constructions.pdf) (Consultada 27-06-2012)
8. Ignacio Larrosa Cañestro.- Secciones conicas con Cabri 3D y GeoGebra. (http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/index_conicas.html) (Consultada 24-05-2012)
9. Pedro Puig Adam.- Curso de Geometría Métrica (2 vols.). Biblioteca Matemática S.L. Madrid 1973.

CONSTRUCCIONES DE CÓNICAS

Para considerar que una cónica puede ser construida debemos conocer CINCO PUNTOS o bien SUS FOCOS y UN PUNTO. Así, si usamos GeoGebra, podemos utilizar las herramientas de construción de cónicas que dispone por defecto:



Las construciones solo se deben basar en operaciones con regla y compás, es decir, están solo permitidas estas cinco:

Trazar una recta uniendo dos puntos.
Trazar un punto mediante la intersección de dos rectas.
Trazar una circunferencia conociendo el centro y el radio.
Tazar un punto mediante la intersección de recta y circunferencia.
Trazar un punto mediante la intersección de dos circunferencias.

1. Cónica: dado los vértices del eje focal y la excentricidad (AAe)

Para construir una cónica de la que se conocen los vértices del eje focal, A y A′, y la excentricidad e, se puede proceder como sigue:

1. El centro de la cónica O es el punto medio de AA′.
2. Siendo OA=a, se tiene que la distancia focal es c=a∗e, por lo que los focos, F y F′, se obtienen intersecando el eje focal con la circunferencia O(ae) de centro O y radio a∗e.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

2. Cónica: dados los vértices del eje focal y una tangente (AAt)

Para construir una cónica de la que se conocen los vértices del eje focal, A y A′, y una tangente t, se puede proceder como sigue:

1. Se construyen la circunferencia O(OA) de diámetro AA′ (circunferencia principal).
2. La tangente dada t y la circunferencia O(OA) se cortan en dos puntos I y J (reales distintos o confundidos, o imaginarios).
3. Las rectas perpendiculares a la tangente t en los puntos I y J, cortan a la recta AA′ en los focos F y F′ de la cónica buscada.
4. La cónica ya puede ser construida, pues se conocen dos focos y una tangente (FFt).

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

3. Elipse: dado las longitudes de sus semiejes (abC$_e$(1))

Para construir, por puntos, una elipse de la que se conoce la longitud a y b de sus dos semiejes procederemos como sigue:

1. Trazamos dos circunferencias O(a) y O(b) de centro en un punto O de radios a y b.
2. Dos rectas perpendiculares por O cortan a las circunferencias O(a) y O(b) en los puntos A y A′, B y B′, que serán los vértices de la elipse.
3. Una semirrecta variable con origen en O corta a las circunferencia O(a) y O(b) en los puntos D y E, respectivamente.
4. La recta por D perpendicular a OA y la perpendicular por E a OB se cortan en un punto P de la elipse.
5. Los focos de la elipse son la intersección de la recta AA′ con la circunferencia B(a), de centro B y radio a.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

4. Elipse: dado las longitudes de sus semiejes (abC$_e$(2))

Otra forma de construir, por puntos, una elipse de la que se conoce la longitud a y b de sus dos semiejes puede ser como sigue:

1. Trazamos dos circunferencias O(a) y O(b) de centro en un punto O de radios a y b.
2. Dos rectas perpendiculares por O cortan a las circunferencias O(a) y O(b) en los puntos A y A′, B y B′, que serán los vértices de la elipse.
3. Los focos de la elipse son la intersección de la recta AA′

con la circunferencia B(a), de centro B y radio a.
4. Tomamos un punto X sobre el segmento FF′ y trazamos las circunferencias F(A′X) y F′(AX). Los puntos de intersección de estas circunferencias están en la elipse.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

5. Elipse: dado las longitudes de sus semiejes (mediante haces proyectivos) (abC$_e$(3))

Podemos construir un arco de una elipse de la que conocemos la longitud de sus ejes 2a y 2b:

1. Dibujando un rectángulo cuya base es el segmento AA′ de longitud 2a y altura 2b: sus extremos son AA′ED.
2. Se dividen los lados AD y DE en el mismo número de partes iguales entre sí.
3. Unir A y A′ a los puntos de división empezando por D y A, respectivamente. Estas rectas se cortan en el arco AP de la elipse de semiejes OA y OB.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

6. Hipérbola: dado las longitudes de sus semiejes (abC$_h$)

Para construir, por puntos, una hipérbola de la que se conoce la longitudes a y b de sus dos semiejes procederemos como sigue:

1. Trazamos la circunferencia O(a) de centro en un punto O de radio a.
2. Tomamos dos puntos A y A′ diametralmente opuestos en O(a), que serán los vértices de la hipérbola.
3. Sobre la perpendicular a OA por A tomamos un punto M, tal que el segmento AM tenga longitud b.
4. La circunferencia O(OM) corta AA′ en los focos F y F′ de la hipérbola.
5. Tomando un punto variable X en la semirrecta con origen en F y que no contiene a O, se trazan las circunferencias F(AX) y F′(AX′), cuyos puntos de corte están en la hipérbola.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

7. Elipse: dado dos vértices (uno en cada eje) y la excentricidad (ABe)

Para construir la elipse de la que se conocen dos vértices, uno en cada eje, A y B, y la excentricidad e, se puede proceder como sigue:

- El centro de la elipse ha de estar en la circunferencia Γ de diámetro AB.

1. Tomemos un punto arbitrario O′ sobre Γ. Si fuera el centro de le elipse pedida, su foco (entre O′ y A) queda determinado como el punto F′ que separa a O′ y A′ en la razón e.
2. Un vértice B′ del eje secundario se halla intersecando la circunferencia F′(O′A), de centro F′ y radio O′A, con la perpendicular por O′ a O′A.

- Al variar O′ sobre Γ, el punto B′ recorre una circunferencia Φ, que pasa por A y B.

3. Trazamos la circunferencia Φ, tomando un punto B′ concreto, a partir de un determinado punto O′ sobre Γ.

- El centro O de la elipse solución es el punto para el cual B′ coincide con B. Por lo que O′B′ será tangente a Φ en B.

4. Trazamos la tangente a Φ en B y donde ésta vuelve a cortar a Γ está el el centro O de la elipse buscada.

- Conociendo los semiejes OA y OB de la elipse, ya puede ser trazada.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

8. Cónica: dado un vértice del eje focal, el foco opuesto y la longitud del eje menor (A_1bF_2)

Para construir la cónica de la que se conoce la longitud de su semieje menor b, un vértice del eje focal A_1 y el foco opuesto F_2, procederemos como sigue:

- Conocenos b y $a+c=A_1F_2$, luego para el caso de la elipse:
  $c_e= ((A_1F_2)^2-b^2) / (2A_1F_2)$.
  Y para el caso de la hipérbola:
  $c_h= ((A_1F_2)^2+b^2) / (2A_1F_2)$.

1. Trazamos la circunferencia $F_2(c_e)$, de centro F_2 y radio c_e.
2. El centro O_e de la elipse es la intersección de esta circunferencia con el segmento A_1F_2
3. El centro O_h de la hipérbola es la intersección de esta circunferencia $F_2(c_h)$con el segmento A_1F_2

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

9. Elipse: dado las longitudes de sus ejes, un foco y un punto abFPC$_e$

Para construir la elipse de la que se conoce las longitudes de sus semiejes, a y b, un foco F y una punto P, procederemos como sigue:

1. La semidistancia focal c viene determinada por $c^2=a^2-b^2$.
2. El otro foco está en la circunferencia F(2c), de centro F y radio 2c.
3. La semirrecta PF corta a la circunferencia P(2a) en el punto Q.
4. Como la suma de distancias de P a los dos focos es 2a, el segundo foco ha de estar, además, en la circunferencia P(FQ) de centro en P y radio la longitud del segmento FQ.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

10. Hipébola: dado las longitudes de sus ejes, un foco y un punto (abFPC$_h$)

Para construir la hipérbola de la que se conoce las longitudes de sus semiejes, a y b, un foco F y una punto P, procederemos como sigue:

1. La semidistancia focal c viene determinada por $c^2=a^2+b^2$.
2. El otro foco está en la circunferencia F(2c), de centro F y radio 2c.
3. La semirrecta PF corta a la circunferencia P(2a) en el punto Q.
4. Como la diferencia de distancias de P a los dos focos es 2a, el segundo foco ha de estar, además, en la circunferencia P(FQ) de centro en P y radio la longitud del segmento FQ.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

11. Cónica: dado las longitudes de sus semiejes, un foco y una tangente (abFt)

Para construir la cónica de la que se conoce las longitudes de sus semiejes, a y b, un foco F y una tangente t, procederemos como sigue:

1. Hallamos el simétrico S del foco F respecto a la tangente

t.

- La semidistancia focal está dada por $c_e=\sqrt{(a^2-b^2)}$, para la elipse, y por $c_h=\sqrt{(a^2+b^2)}$, para la hipérbola.

2. El otro foco ha de estar en la intersección de las circunferencias S(2a), de centro en un punto S de radio 2a, y $F(2c_e)$, para obtener elipses (b<a).
3. Si las circunferencias S(2a) y $F(2c_e)$ no se cortan, no hay solución; si son tangentes sólo hay una elipse; y si se cortan, se obtienen dos focos F_1 y F_2, dando lugar a dos elipse.
4. Al interesecar las circunferencias S(2a) y $F(2c_e)$, se obtienen los otros focos de hipérbolas.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

12. Cónica: dado su centro, un vértice y la medida de su semieje secundario

(AbO)

Para construir la cónica de la que se conoce la longitud de su semieje secundario b, su centro O y un vértice A, procederemos como sigue:

1. La recta OA es el eje focal de la cónica a construir

- Para el caso de la hipérbola:

2. Se traza la recta perpendicular al eje focal por el vértice A y la circunferencia A(b), de centro en A y radio b. Sea E un punto de corte de ambas.
3. La circunferencia de centro en O y que pasa por E, corta al eje focal en los focos de la hipérbola pedida.

- Para el caso de la elipse:

4. Se traza la recta perpendicular al eje focal por el vértice O (eje secundario) y la circunferencia O(b), de centro en O y radio b. Sea B un punto de corte de ambas.
5. La circunferencia B(OA) de centro en B y radio OA, corta al eje focal en los focos de la elipse pedida.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

13. Elipse: dado la longitud del eje focal, la distancia focal, un foco y una tangente (acFt)

Para construir la elipse de la que se conoce la longitud de su semieje focal a, la semidistancia focal c, un foco F, y una tangente t, procederemos como sigue:

1. Hallamos el simétrico S del foco F respecto a la tangente t.
2. El otro foco ha de estar en la intersección de las circunferencias S(2a), de centro en un punto S de radio 2a, y F(2c).
3. Si las circunferencias S(2a) y F(2c) no se cortan, no hay solución; si son tangentes sólo hay una cónica; y si se cortan, se obtienen dos focos F_1 y F_2, dando lugar a dos cónicas.
4. Las cónicas que pueden resultar son elipses, ya que la tangente t nunca corta a los segmentos FF_1 y FF_2, al estar estos tres puntos en un mismo semiplano determinado por t.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

14. Cónica: dado un vértice (en el eje focal), una directriz y un punto (AdP)

Para construir la cónica de la que se conoce un vértice del eje focal A, un punto P, una directriz d, procederemos como sigue:

- Vamos a utilizar el siguiente resultado:
  "Dados dos puntos P_1 y P_2 y una recta d, el lugar geométrico de los focos de las cónicas con directriz correspondiente d y que pasan por P_1 y P_2, es la circunferencia de Apolonio de P_1 y P_2 y razón $k=MP_1/MP_2$, siendo M el punto en el que la recta P_1P_2 corta a d."

1. Hallamos el punto Q de intersección de la recta AP con la directriz d.
2. Obtenemos el punto R de intersección de la recta AP con la polar de Q respecto a la circunferencia Φ de diámetro el segmento AP.
3. Trazamos la circunferencia Γ de diámetro QR, donde ha de estar el foco de la cónica.
4. El eje de la cónica es la perpendicular a la directriz d por el vértice dado A. La intersección del eje con la circunferencia Γ, F_1 y F_2, nos da uno de los dos focos de las dos cónicas que cumplen con los datos dados.
5. Para determinar el otro vértice del eje focal de la cónica de foco (por ejemplo) F_2, hallamos la polar de A respecto a la circunferencia Ψ, de diámetro DF_2, que intersecada con ele eje focal nos el otro vértice A_2.
6. El punto medio de AA_2 es el centro O_2 de la cónica, y el simétrico de F_2, respecto a O_2, es el otro foco F'_2.
7. Con dos focos, F_2 y F'_2, y un punto P, ya podemos

construir la cónica.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

15. Cónica: dado el eje focal (recta), un foco, una tangente y la longitud del eje focal (ae$_1$Ft)

Para construir la cónica de la que se conoce la longitud del eje focal 2a, la recta que contine al eje focal, un foco F y una tangente t, procederemos como sigue:

1. Construimos el simétrico S del foco F respecto a la tangente t y la proyección ortogonal $\pi_t F$ del foco F sobre la tangente t.
2. Trazamos la circunferencia $\pi_t F(a)$ de centro $\pi_t F$ y radio la semidistancia focal a; ella contine al centro de la cónica buscada.
3. Los punro O_1 y O_2 de intersección del eje focal con la circunferencia $\pi_t F(a)$ son centros de las dos posibles cónicas solución.
4. Los puntos simétricos, F_1 y F_2, del foco F respecto a los centros O_1 y O_2, nos dan el otro foco de la correspondiente cónica.
   Se obtienen los mismos puntos intersecando el eje focal con la circunferencia S(2a), de centro en S y radio 2a.
5. La recta SF_1 corta a la tangente t en su punto P_1 de tangencia. Así, la cónica de focos F y F_1 y que pasa por P_1, ya puede ser construida.
6. Similarmente, la recta SF_2 corta a la tangente t en su punto P_2 de tangencia, con lo que ya se puede construir la cónica de focos F y F_2 y que pasa por P_2.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

16. Hipérbola: dado la longitud del semieje focal, el eje focal y una asíntota (ae$_1$h)

Para construir la hipérbola de la que se conoce la longitud del semieje focal a, el eje focal e_1 y una asíntota h, procederemos como sigue:

1. El centro es el punto O de intersección del eje y la asíntota dados.
2. Se traza la circunferencia O(a), de centro O y radio a, que corta el eje focal en los vértices A y A′.
3. La perpendicular por A al eje corta a la asíntota en un

punto que dista del origen la semidistancia focal c.

4. La circunferencia O(c) corta al eje en los focos F y F′; po lo que la hipérbola pedida ya puede ser construida.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

17. Hipérbola: dado la longitud del semieje focal, la dirección del eje focal, una asíntota y un punto (ae$_1$hP)

Para construir la hipérbola de la que se conoce la longitud del semieje focal a, la dirección del eje focal u, una asíntota h y un punto P, construimos primero la hipérbola Γ, con centro en un punto arbitrario O′ de la asíntota h, y de longitud de semieje focal a. Luego, trasladamos la hipérbola Γ, en la dirección de la asíntota h, para obtener una hipérbola que pasa por el punto P.

1. Tomado un punto O′ en la asíntota h, construimos la hipérbola Γ (ae_1h) de centro O′, semieje focal a y asíntota h.
2. Hallamos el punto Q de intersección de la recta paralela a h por P con Γ; para lo cual usamos el terorema de Pascal aplicado al hexágono cuyos lados quedan determinados por las rectas: h′ (tangente en un punto del infinito a Γ), la recta paralela a h′ por A′ (un vértice de Γ), la recta paralela a h por A′, la asíntota h, la recta δ y la recta paralela a h′ por Q (punto a determinar).
3. Finalmente, se traslada la hipérbola Γ según el vector v=QP.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

18. Parábola: dado el vértice, el eje y un punto (Ae$_1$PC$_p$)

Para construir la paróbola de la que se conoce el eje, el vértice A y un punto P, procederemos como sigue:

- Hacemos uso de la propiedad de la parábola siguiente:
  En una parábola, la tangente t en un punto P corta a la tangente t_A, en su vértice A, en el punto medio de AQ, siendo Q la proyección ortogonal de P sobre t_A.

1. Trazamos la tangente t_A en el vértice A: perpendicular al eje.
2. Trazamos la paralela al eje por P, que corta a la tangente t_A en Q.

3. Sea M el punto medio de AQ.
4. Trazamos la perpendicular a la recta PM (tangente en P) por el punto M, la cual corta al eje en el foco F.
5. La directriz a la parábola es la perpendicular al eje por el punto D, simétrico de F respecto a A.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

19. Parábola: dado el vértice, el eje y una tangente (Ae_1tC_p)

Para construir la parábola de la que se conoce el eje, el vértice A y una tangente t, procederemos como sigue:

1. Trazamos la recta perpendicular t_A al eje por el vértice A (tangente a la parábola).
2. Se halla el punto M de intersección de la tangente en el vértice t_A con la tangente dada t.
3. La recta perpendicular a la tangente t por M corta al eje en el foco F de la parábola buscada.
4. Por el punto D, simétrico de F respecto a A, se traza la directriz d (perpendicular al eje por D).

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

20. Hipérbola: dado la longitud del semieje focal y los dos focos ($aFFC_h$)

Para la construcción de la hipérbola de la que se conoce la longitud a de su semieje focal y sus dos foco, F_1 y F_2, puede utilizarse el caso abC_h, siendo $b^2=F_1F_2{}^2/4-a^2$. O bien, proceder de la forma siguiente:

1. Trazamos la circunferencia focal relativa al foco F_2: $F_2(2a)$ de centro en F_2 y radio 2a.
2. Si M es un punto sobre $F_2(2a)$, la mediatriz de MF_1 es tangente a la hipérbola en su punto de intersección con la recta MF_2.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

21. Hipérbola: dado un foco, una asíntota y la longitud del semieje focal (aFh)

La construcción de la cónica (hipérbola) de la que se conoce la longitud a de su semieje focal, un foco F y una asíntota h, puede ser como sigue:

1. Se construye el simétrico S del foco F, respecto a la asíntota h (tangente en el punto en el punto del infinito).

- El otro foco F′ de ha de estar a una distancia 2a de S y el punto de tangencia de h (en el infinito) está alineado con S y F′.

2. Se trazan la circunferencia S(2a), de centro S y radio 2a, y la recta paralela por S a la asíntota h. La intersección de ambas dan los dos posibles focos F′ y F″ de las hipérbolas a construir. Sus centros O′ y O″ son los puntos medios de F y F′, y F y F″, respectivamente.
3. Los vértices de dichas hipérbolas se obtienen intersecando sus eje focales FF′ y FF″ con las circunferencia principales O′(a) y O″(a), respectivamente.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

22. Elipse: dado un foco, dos puntos y la longitud del semieje focal (aFPPC$_e$)

Para construir la elipse de la que se conoce un foco F, dos puntos P_1 y P_2 y la longitud del eje focal a, procederemos como sigue:

1. Se traza la circunferencia $P_1(2a\text{-}FP_1)$ de centro P_1 y radio $2a\text{-}FP_1$.
2. Así mismo, se traza la circunferencia $P_2(2a\text{-}FP_2)$ de centro P_2 y radio $2a\text{-}FP_2$.
3. Los puntos de intersección de las circunferencias $P_1(2a\text{-}FP_1)$ y $P_2(2a\text{-}FP_2)$, F_1 y F_2, son los otros focos de sendas elipses, solución del problema.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

23. Hipérbola: dado un foco, dos puntos y la longitud del semieje focal (aFPPC$_h$)

Para construir la hipérbola de la que se conoce un foco F, dos puntos P_1 y P_2 y la longitud del eje focal a, procederemos como sigue:

1. Se traza la circunferencia $P_1(FP_1+2a)$ de centro P_1 y radio FP_1+2a.
2. Así mismo, se traza la circunferencia $P_2(FP_2+2a)$ de centro P_2 y radio FP_2+2a.
3. Los puntos de intersección de las circunferencias

$P_1(FP_1+2a)$ y $P_2(FP_2+2a)$, F_1 y F_2, son los otros focos de sendas hipérbolas, solución del problema.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

24. Cónica: dado un vértice (en el eje focal), un foco y una tangente (AFt)

La construcción de la cónica de la que se conoce un vértice A, un foco F y una tangente t, puede ser como sigue:

1. Se construye el eje focal AF.
2. Se traza la perpendicular por el foco F a la tangente t. Sea M su pie, que está en la circunferencia principal.
3. Se determina la mediatriz de AM, que corta al eje focal en el centro O de la cónica. (Si dicha mediatriz es paralela al eje focal la cónica es una parábola ya determinada, pues se conoce foco F y vértice A).
4. El simétrico de A, respecto a O, es el otro vértice A′. El simétrico de F, respecto a O, es el otro foco F′.
5. Se construye el simétrico S del foco F, respeto a la tangente t.
6. La recta SF′ corta a la tangente t en el punto de tangencia P con la cónica.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

25. Cónica: dado la longitud del eje focal, un foco, una tangente y su punto de contacto (aFt_P)

Para la costrucción de la cónica de la que se conoce la longitud de eje focal a, un foco F, una tangente t y su punto de contacto P, podemos seguir los siguientes pasos:

1. Se traza la circunferencia focal c_F=F(2a) de centro en el foco F y radio la longitud del eje focal 2a.
2. La semirrecta FP corta a la circunferencia focal c_F en S′
3. El otro foco F′ es el simétrico de S′ respeto a la tangente t.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

26. Cónica: dado la longitud de su eje focal, un foco y dos tangentes (aFtt)

Para la costrucción de la cónica de la que se conoce la longitud de eje focal a, un foco F y dos tangentes t_1 y t_2, podemos seguir los siguientes pasos:

1. Hallamos los puntos simétricos, S_1 y S_2, del foco F, respecto a las tangentes, t_1 y t_2, respectivamente.
2. El otro foco está en la intersección de las circunferencias $S_1(2a)$ y $S_2(2a)$, de centros en S_1 y S_2 y radio 2a.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

27. Cónica: dado el centro, dos tangentes y la longitud del semieje focal (aOtt)

La construcción de la cónica de la que se conoce la longitud a de su semieje focal, el centro O y dos tangentes, t_1 y t_2, puede ser como sigue:

- Utilizamos la propiedad de que los pies de las proyecciones ortogonales de los focos sobre las tangentes están en la circunferencia principal.

1. Determinamos los puntos de intersección de las tangentes dadas t_1 y t_2 con la circunferencia O(a) de centro O y radio a.
2. Se trazan las perpendiculares a cada tangente por cada uno de los puntos encontrados en ellas (en el paso 1.).
3. Pares de estas tangentes determina cuatro puntos. Cada dos puntos de estos (no situados en una misma de las perpendiculares trazadas en el paso 2.) determinan un par de focos de una cónica solución.
4. Para determinar las cónicas pedidas, podemos proceder como en el caso "Cónica conocidos dos focos y una tangente".

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

28. Elipse: dado los vértices del eje secundario y la excentricidad (BBe)

Para construir la elipse de la que se conocen los vértices del eje secundario, B y B′, y la excentricidad e, se puede proceder como sigue:

1. El centro de la elipse es el punto medio O de BB′ y su eje focal es la mediatriz de BB′.
2. La semilongitud b de su eje secundario es la distancia de O a B.
3. La semilongitud de su eje focal, en función de b y la excentricidad e, es $a=b/(\sqrt{(1-e^2)})$, construible con regla y compás.

4. La intersección del eje focal con las circunferecias O(a) y B(a) dan, respectivamente, los vértices A y A′ y los focos F y F′.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

29. Elipse: dado los vértices del eje secundario y una tangente (BBt)

Para construir la elipse de la que se conocen los dos vértices del eje secundarip B y B′ y una tangente, podemos seguir los siguientes pasos:

1. Trazamos el segmento BB′; su mediatriz es el eje focal.
2. Las paralelas por B y B′ al eje focal son tangentes a la elipse.
3. La recta t′ simétrica de t, respeco al eje focal, es otra tangente a la elipse.

- Ya tenemos cuatro tangentes y un punto de tangencia ($tttt_P$) a una de ellas, por ejemplo, el punto B.

- Si la recta t corta al segmento BB′ la cónica obtenida no será una elipse.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

30. Elipse: dado el centro, una directriz y un vértice del eje menor (BdO)

Para construir la elipse de la que se conoce una directriz d, el centro O y un vértice B del eje menor, podemos seguir los siguientes pasos:

- El cociente ε=δ/a (excentricidad) de la distancia δ, de B a la directiz, entre la distancia a, de B al foco correspondiente, debe ser el mismo que (a-c)/(δ-a), para el caso del vértice del eje focal más cerca de la directriz d. Luego, la semidistancia focal ha de satisfacer a la ecuación: $c^2-\delta c+b^2=0$.

1. Utilizando cada una de las soluciones reales (construibles con regla y compás), c_1 y c_2, de la ecuación anterior (semi distancias focales), trazamos sendas circunferencias, $O(c_1)$ y $O(c_2)$, de centro O y radios estas raíces.
2. Cada par de puntos de interción de las circunferencias $O(c_1)$ y $O(c_2)$ con el eje focal (recta perpendicular a la directriz d por el centro O), son los focos de las elipse solución.

- Hay solución cuando δ≥2b.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

31. Elipse: dado la longitud del eje menor, el eje focal (recta) y un foco

(be$_1$Ft)

Para construir la elipse de la que se conoce la semilongitud del eje secundario b, el eje focal e_1, un foco F y una tangente t, podemos proceder de la forma siguiente:

1. Un vértice B, del eje secundario de la elipse a construir, ha de estar en la recta δ paralela al eje dado a una distancia b de éste.

- Si conocemos el punto de contacto P_1 de la elipse con la tangente t, ella ya puede ser construida:

2. Determinamos el punto simétrico S del foco F, respecto a la tangente t.
3. El otro foco F_1 es la intersección de la recta SP_1 con el eje focal.

- Sea B_1 un vértice del eje secundario de la elipse de focos F y F_1 y que pasa por P_1.
  Al variar el punto P_1 sobre la tangente t, el vértice B_1 recorre una parábola, con eje el mismo que el de las elipses y vértice en el punto medio, A_p, de F y el punto R de intersección de la tangente t con el eje: A_p es el punto B_1, cuando P_1 coincide con R (la elipse se reduce al segmento FR).
  Otra posición del punto B_1 (el punto N) corresponde a cuando P_1 es tal que los focos F y F_1 coinciden (la elipse es una circunferencia de centro en F y tangente a t).
  El foco F_p de tal parábola se determina como en el caso de construcción de la parábola conocido el vértice, el eje y un punto.

- La verdadera posición de B_1 es el punto de intersección de la parábola con la recta δ.

4. Para hallar esta intersección, se construye el punto Q donde se cortan la recta δ y la tangente a la parábola en su vértice A_p.
5. Sea M el punto medio de Q A_p.
6. Se traza la perpendicular a la recta MF_p por M, la cual corta a la recta δ en el vértice B de la elipse buscada.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

32. Elipse: dado un vértice del eje secundario, un foco y un punto (BFP)

Para construir la elipse de la que se conoce un vértice del eje secundario B, un foco F y un punto P, podemos seguir los siguientes pasos:

1. El centro de la elipse está en la circunferencia Γ de diámetro FB, de longitud la semidistancia focal a.

- Utilizamos la propiedad de una elipse:
  Si F es un foco, P un punto sobre ella y designamos por M el punto medio de FP, entonces la circunferencia de centro en M y tangente a la circunferecia F(a), de centro en F y radio a (longitud del semieje focal), pasa por el centro O de la elipse.

2. Trazamos la circunferencia F(a), de centro en F y pasando por B.
3. Trazamos la circunferencia Φ de centro en M (punto medio de FP) y tangente a la circunferencia F(a), ella pasa por el punto N de intersección de F(a) con la semirrecta de FP.
4. Los puntos O_1 y O_2, de intersección de las circunferencias Γ y Φ, son centros de las elipses a construir.
5. Los focos respectivos, F_1 y F_2, son los puntos simétricos del foco dado F, respecto a los centros O_1 y O_2.

Nota: Fijados el foco F y el vértice B, hay dos soluciones si P está en el interior de la elipse Ψ de focos B y F y longitud de eje focal 3a=3&sbnp;FB; una sola solución si P está sobre Ψ; y no hay solución si está en el exterior de Ψ. En este últinmo caso, el otro foco de la única elipse solución, está en la circunferencia B(a), de centro en B y que pasa por F.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

33. Hipérbola: dado sus asíntotas y la longitud de su eje secundario (bhh)

Para construir la hipérbola de la que se conoce las asíntotas h_1 y h_2 y la longitud de su eje secundario 2b, podemos seguir los siguientes pasos:

1. El centro O de la hipérbola es el punto de intersección de las asíntotas dadas h_1 y h_2.
2. Tomamos como eje focal una de las dos bisectrices de las asíntotas.
3. La paralela al eje focal a una distancia b de éste, corta a

una de las asíntotas en M.
4. La perpendicular al eje por M, corta a éste en un vértice A de la hipérbola.
5. La circunferencia O(OM), de centro O y radio OM, corta al eje focal en los focos, F y F′.

• Si tomamos la otra bisectriz de las asíntotas, como eje focal, obtenemos otra hipérbola.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

34. Cónica: dado un foco, una tangente, su punto de tangencia y la distancia focal (cFt$_P$)

Para construir la cónica de la que se conoce la longitud 2c de la distancia focal, un foco F, una tangente t y su punto de tangencia P, se puede proceder como sigue:

1. Se construyen los simétricos S del foco F respecto a la tangente t.
2. Se traza la recta PS, donde estará el otro foco.
3. El otro foco está además en la circunferencia F(2c), de centro F y radio 2c.

• Existirán dos cónicas cuando la recta PS corte a la circunferencia F(2c). Una sola cónica, cuando recta y circunferencia sean tangentes. Y no hay solución si la recta es exteriro a la circunferencia.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

35. Cónica: dado un foco, dos tangentes y la distancia focal (cFtt)

Para construir la cónica de la que se conoce la longitud 2c de la distancia focal, un foco F y dos tangentes, t_1 y t_2, se puede proceder como sigue:

1. Se construyen los simétricos S_1 y S_2 del foco F respecto a las tangentes t_1 y t_2.
2. En la mediatriz de S_1S_2 estará el foco de la cónica buscada y en la circunferencia F(2c) de centro F y radio 2c. La mediatriz y F(2c) se cortán en dos puntos F_1 y F_2 (reales distintos o confundidos, o imaginarios).
3. Las rectas F_1S_1, F_1S_2, F_2S_1 y F_2S_2 cortan a las tangentes t_1 y t_2 en puntos de la correspondiente cónica buscada.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

36. Cónica: dado la circunferencia principal y dos tangentes ($c_p tt$)

Para construir la cónica de la que se conoce la circunferencia principal c_p y dos tangentes, t_1 y t_2, se puede proceder como sigue:

- Es el caso Cónica: dado el centro, dos tangentes y la longitud del semieje focal (aOtt)

1. Trazamos las rectas perpendiculares a las tangentes t_1 y t_2 por los puntos de corte con la cincunferencia principal c_p (4 rectas).
2. Las intersecciones de las rectas nos dan los focos de la cónica por pares, F_1 y F'_1, y F_2 y F'_2. Por lo que hay dos soluciones, siempre que las dos tangentes, t_1 y t_2, corten a la circunferencia c_p.
3. Ya conocemos dos focos y una tangente (FFt) y cada cónica se puede construir.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

37. Cónica: dados dos puntos y sus dos directrices (ddPP)

Para construir la cónica de la que se conoce dos directrices, d_1 y d_2, y dos puntos, P_1 y P_2, se puede proceder como sigue:

- Vamos a utilizar el siguiente resultado:
  "Dados dos puntos P_1 y P_2 y una recta d, el lugar geométrico de los focos de las cónicas con directriz correspondiente d y que pasan por P_1 y P_2, es la circunferencia de Apolonio de P_1 y P_2 y razón $k=MP_1/MP_2$, siendo M el punto en el que la recta P_1P_2 corta a d."
  O el resultado equivalente:
  "La recta que pasa por dos puntos P_1 y P_2 de una cónica, corta a una directriz en un punto M tal que FM es la bisectriz interior (exterior) del ángulo $\angle P_1FP_2$, siendo F el foco correspondiente a la directriz d."

1. Trazamos la recta P_1P_2, que corta a las directrices d_1 y d_2 (éstas han de ser paralelas), en los puntos M_1 y M_2, respectivamente.

- El punto antipodal N_1 de M_1 en la circunferencia de Apolonio, Γ_1, de P_1 y P_2 y razón M_1P_1/M_1P_2, es el punto de intersección de la recta P_1P_2 con la polar de M_1 respecto a la circunferencia de diámetro P_1P_2.

2. Se traza la circunferencia Γ_1 de diámetro M_1N_1 (en la que va a estar el foco correspondiente a la directriz d_1).
3. Análogamente, se traza la circunferencia Γ_2 de diámetro M_2N_2 (en la que va a estar el foco correspondiente a la directriz d_2).

- Como los dos focos de la cónica han de estar en una recta perpendicular a las directrices, el foco correspondiente a la directriz d_2 ha de estar, además, en la circunferencia Γ'_1, simétrica de Γ_1, respecto a la recta δ paralela intermedia de las dos directrices.

4. La intersección de las circunferencias Γ'_1 y Γ_2, nos dan dos focos, F_2 y F'_2, correspondientes a la directriz d_2.
5. Los correspondientes focos, F_1 y F'_2, se determinan hallando los puntos simétricos de F_2 y F;$'_2$, respecto de δ.
6. La cónica obtenidas serán elipses si los puntos P_1 y P_2 están entre las dos directrices dadas d_1 y d_2; y serán hipérbolas si ambos puntos no están entre ellas.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

38. Cónica: conocido un foco, su directriz y la excentricidad (deF)

Para construir la cónica de la que se conoce el foco F, la directriz d y la excentricidad e, procederemos como sigue:

1. La perpendicular por el foco F a la directriz d es el eje focal, que corta a d en D.

- Vamos a encontrar el vértice A de la cónica comprendido entre F y D, el cual ha de verificar AF/AD=e; es decir, debemos encontrar el punto que divide al segmento FD en la razón e:

2. Se trazan las circunferencias D(1) y F(e), de centros en D y F, y radios respectivos 1 y e.
3. Sea M uno de los puntos de corte de la directriz d con la circunferencia D(1) y N el punto (que está en el semiplano, respecto al eje focal, que no contiene a M) de corte de la circunferencia F(e) con la recta perpendicular al eje por F.
4. El punto A se obtiene intersecando el eje focal con la recta MN.

- Para hallar el otro vértice A′ del eje focal, hacemos uso de que la directriz d es la polar de F, respecto a la cónica; por lo que, A y A′ están separados armónicamente de F y D.

5. Trazamos la circunferencia Γ de diámetro FD. La polar de A respecto a Γ corta al eje focal en el otro vértice, A′.
6. El punto medio O de A y A′ es el centro de la cónica y el punto F′, simétrico de F respecto a O, es el otro foco.

- Nota: Si la excentridad e<1,se trata de una elipse; si e>1, es una hipérbola; y si e=1, se trata de una parábola, ya determinada por su foco F y su directriz d.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

39. Cónica: conocido un foco, su directriz y la excentricidad (deF(2))

Para construir (por puntos) la cónica de la que se conoce el foco F, la directriz d y la excentricidad e, procederemos como sigue:

1. La perpendicular por el foco F a la directriz d es el eje focal, que corta a d en D.
2. Se toma un punto X sobre el eje focal.
3. Con la heramienta "Homotecia" de GeoGebra, se construye el punto Y, homotético de X en la homotecia de centro D y razón la excentridad e.
4. Se traza la circunferencia F(DY), de centro en el foco F y radio la longitud del segmento DY.
5. Los puntos de interseccion P y P′ de F(DY) con la recta paralela a la directriz d y que pasa por X, son puntos de la cónica.
6. Cuando X varía, los puntos P y P′, describen la cónica pedida.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

40. Cónica: conocido un foco, su directriz y la excentricidad (deF(3))

Para construir (por puntos) la cónica de la que se conoce el foco F, la directriz d y la excentricidad e, hacemos uso del siguiente resultado:

"Dados dos puntos X y F y una recta d, se toma un punto U en d. Por F se traza la recta paralela a XU, que corta a d en V. Sea Y el punto de intersección de la recta XF con la paralela a UF por V.
Cuando X recorre una circunferencia de centro en F y radio r, el punto Y describe una cónica de foco F,

directriz correspondiente d y excentricidad e=r/δ (donde δ es la distamcia de F a d)".
• La construcción del punto Y, a partir de de X, no depende del punto U tomado en d.
(Michel Bataille.- A Unified Construction of Conics. The Mathematical Gazette, Vol. 86, No. 507, Nov., 2002 (pp.408-414)).

1. Trazamos la circunferencia F(e FD), de centro en F y radio el producto de la excentricidad e por la distancia FD de F a la directriz d.
2. Tomemos un punto arbitrario M sobre la circunferencia F(e FD).
3. Tomamos un punto U sobre la recta d y trazamos loa segmentos UM y UF.
4. Por F trazamos la recta paralela a UM, que corta a d en el punto V.
5. Se traza la recta paralela a UF por V, que corta a MF en P,
6. Cuando M varía en la circunferencia F(e FD), P describe la cónica pedida.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

41. Parábola: dado la directriz y el foco

(dFC$_p$(1))

Para construir la parábola de la que se conoce el foco y la directriz procederemos como sigue:

1. Por un punto M de la directriz d trazamos la perpendicular a ella.
2. Trazamos la mediatriz del segmento FM.
3. Los puntos de intersección de ambas rectas trazadas pertenecen a la parábola de foco F y directriz d.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

42. Parábola: dado la directriz y el foco

(dFC$_p$(2))

Otro procedimiento para construir la parábola de la que se conoce el foco y la directriz puede ser el siguiente:

1. Trazamos una recta δ paralela a la directriz a una distancia ρ en el semiplano que contiene al foco.
2. Trazamos una circunferencia F(ρ) de centro en el foco F y radio ρ.
3. Los puntos de intersección de cada circunferencia F(ρ) y recta δ trazadas, cuando ρ varía, pertenecen a la parábola.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

43. Cónica: dado un foco, la directriz correspondiente y una tangente (dFt)

Para construir la cónica de la que se conoce un foco, la directriz correspondiente y una tangente, podemos seguir los siguientes pasos:

- Hacemos uso de la siguiente propiedad:
  "El segmento de tangente a una cónica comprendido entre el punto de contacto y una directriz, se ve desde el foco correspondiente según un ángulo recto".

1. Hallamos el punto M de intersección de la tangente y directriz dadas.
2. Se traza la perpendicular a FM por F; ésta corta a la tangente t en P, punto de tangencia P de t con la cónica.
3. La recta perpendicular a la directriz d por el foco F es el eje de la cónica.
4. La recta que une P con el simétrico S del foco F, respecto a la tangente t, corta al eje en el otro foco F′.
5. Ya se puede construir la cónica de la que se conocen dos focos, F y F′, y un punto P.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

44. Hipérbola equilátera: dado y un foco y su directriz (dFh⊥h)

Para construir la hipérbola equilátera de la que se conoce un foco F y la directriz d correspondiente: , podemos seguir los siguientes pasos:

1. La recta perpendicular a la directriz d por el foco F es el eje focal de la hipérbola.
2. Se traza la circunferencia D(DF) de centro en el punto D, de intersección de la directriz d con ele eje, y radio DF.
3. La circunferencia D(DF) vuelve a cortar al eje en el centro O de la hipérbola.
4. La circunferencia D(DF) corta a la directriz d en puntos de las asíntotas.
5. La proyección ortogonal de los puntos de corte de las asíntotas con la circunferencia O(OF), son los vértices de la hipérbola.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

45. Cónica: dado una directriz, el centro

y un punto (dOP)

Para construir la cónica de la que se conoce una directriz d, el centro O y un punto P, podemos seguir los siguientes pasos:

1. El eje focal es la recta perpendicular a la directriz d por el centro O.
2. Hallamos el punto M de intersección de la recta OP y directriz dada d (siempre que P no sea un vértice del eje secundario).
3. Construimos el simétrico P′ de P respecto al centro O.
4. Se construye el conjugado armónico N de M respecto a P y P′. (El punto N es el punto de corte con OP de la polar de M respecto a la circunferencia de diámetro PP′).
5. Un foco de la cónica a construir estará en la circunferencia de diámetro MN y sobre el eje focal (la perpendicular a la directriz por el centro O). Pudiendo existir dos (F_1 y F_2), uno o ninguno.
6. Los simétricos, respecto al centro O, de los puntos obtenidos son los otros focos, (F'_1 y F'_2).
7. Ya se puede construir la cónica de la que se conocen dos focos, (F_1 y F'_1) o (F_2 y F'_2) y un punto P.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

46. Cónica: dado una directriz y tres puntos (dPPP)

Para construir la cónica de la que se conoce una directriz d y un tres puntos, P_1, P_2 y P_3, podemos seguir los siguientes pasos:

1. Hallamos los puntos M_2 y M_3, de intersección de la directriz dada d con las rectas P_1P_2 y P_1P_3, resectivamente.
2. Construimos los conjugados armónicos N_2 y N_3 de M_2 y M_3, respecto a P_1 y P_2 por un lado, y respecto a P_1 y P_3, por otro.
3. Un foco (F_2 o F_3) de cada posible solución está en la intersección de las dos circunferencias de diámetros M_2N_2 y M_3N_3.
4. El eje focal de cada cónica solución es la perpendicular por un foco (F_2 o F_3) a la directriz común d.
5. Puntos simétricos, respecto a cada eje, de pares de puntos dados permiten encontrar otros puntos de cada cónica hasta tener cinco, sufucientes para poder construirlas.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

47. Parábola: dado la directriz, un punto

y una tangente (dPtC$_p$)

Para construir la parábola de la que se conoce la directriz d, un punto P y una tangente t, procederemos como sigue:

- El foco ha de estar en la circunferencia Γ de centro P y tangente a la directriz dada d.

- Además, el simétrico del foco, respecto a la tangente t, ha de estar en la directriz d.

1. Trazamos la circunferencia Γ de centro en el punto P dado y que es tangente a d.
2. Hallamos la simétrica de Γ respecto a t. Sean S_1 y S_2 los puntos de intersección de Γ con la directriz d.
3. Determinamos los simétricos de los puntos S_1 y S_2, respecto a t. Los puntos obtenidos son los focos F_1 y F_2 de las parábolas buscadas.

- Si la circunferencia Γ corta a la directriz d en dos puntos, existen dos parábolas; si d es tangente a Γ hay una sola parábola; y si d es exterior a Γ, no hay solución.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

48. Cónica: dado una directiz, un punto, una tangente y su punto de contacto (dPt$_p$)

Para construir la cónica de la que se conoce una directriz d, un punto P_1, una tangente t y su punto de tangencia P, procederemos de la siguiente forma:

- Vamos a determinar el foco F, correspondiente a directriz dada d; lo que nos permite acudir al caso de construir la cónica conocido un foco, la directriz correspondiente y una tangente (dFt).

- Hacemos uso de la siguiente propiedad: "El segmento de tangente a una cónica comprendido entre el punto de contacto y una directriz, se ve desde el foco correspondiente según un ángulo recto".

1. Obtenemos el punto M de intersección de la tangente t con la directriz d.
2. Trazamos la circunferencia Φ, de diámetro MP, donde ha de estar el foco F.

- Por otra parte, si p y p_1 son las distancias de P y P_1 a la directriz d, respectivamente, los cocientes PF/p y P_1F/p_1 (excentricidad) han de coincidir. Luego,

$PF/P_1F=p/p_1$ es constante, es decir, F debe estar en la circunferencia de Apolonio Ψ, de P y P_1 y razón $k=FP/FP_1$.

3. La intersección de las circunferencias Φ y Ψ, nos dan dos posibles focos F_1 y F_2, correspondientes a la directriz d.
4. El otro foco F'_1, de la cónica solución de foco F_1, se obtiene hallando el simétrico S_1 de F_1, respecto a la tangente t.
5. El foco F'_1 es la intersección de la recta PS_1 con el eje focal (recta perpendicular a la directriz d por F_1).

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

49. Parábola: dado la directriz y dos tangentes (dttC_p)

Para construir la parábola de la que se conoce la directriz d, y dos tangentes t_1 y t_2, procederemos como sigue:

- Usaremos que, en parábola, el simétrico del foco, respecto a una tangente, queda en la directriz.

- Así, la recta simétrica de la directriz, respecto a una tangente, pasa por el foco.

1. Trazamos las simétricas de la directriz d, respecto a cada una de las tangentes dadas t_1 y t_2; ambas se cortan en el foco F.
2. Se conoce el foco F y la directriz d y podemos proceder como en el caso "Parábola dado el foco y la directriz" (dFC_p).

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

50. Parábola: dado el foco, su eje y una tangente (e_1FtC_p)

Para construir la parábola de la que se conoce su eje, el foco F y una tangente t:

1. Hallamos el punto S simétrico de F respecto a la tangente dada t.
2. La directriz d es la perpendicular al eje por el punto S.
3. Utilizamos la herramienta parábola de GeoGebra, a partir del foco F y la directriz d.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

51. Hipérbola: dado un punto, uno de los ejes y una asíntota $(e_k hP)$

Para construir la hipérbola de la que se conoce un eje, un punto P y una asíntota h:

1. La recta simétrica, respecto al eje dado, de la asíntota dada h es la otra asíntota h′
2. Ya podemos usar el caso (hhP) de construcción de la hipérbola de la que se conoce un punto y dos asíntotas.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

52. Parábola: dado el eje y dos puntos (e_1PPC_p)

Para construir la parábola de la que se conoce su eje y dos puntos, P_1 y P_2:

1. Hallamos el simétrico P'_1 de P_1, respecto al eje.

- Para trazar la tangente t_1 en P_1, ulilizaremos el Teorema de Pascal aplicado al hexágono de lados: la paralela al eje por P_1, la tangente en P_1 (a determinar), la recta P_1P_2, la recta $P_2P'_1$, la paralela al eje por P'_1 y la recta del infinito.

2. La recta de Pascal es la paralela a P_1P_2 por el punto de intersección de la primera y la cuarta.
3. La recta de Pascal corta la quinta en el punto por donde pasa t_1.
4. El foco F es el punto del eje en el que lo corta la recta simétrica, respecto a t_1, de la recta paralela al eje por P_1.
5. La directirz de la parábola es la recta perpendicular al eje por el punto S, simétrico del foco F respecto a la tangente t_1.

- La construcción no es posible si P_1P_2 es paralela o perpendicular al eje (en este último queda indeterminada, si los puntos son simétrios respecto al eje).

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

53. Cónica: dado el eje focal, una

tangente y dos puntos en la circunferencia principal ($e_1tMM\in c_p$)

Para construir la cónica de la que se conocen el eje focal, una tangente t, y dos puntos en su circunferencia principal, M y N, procederemos como sigue:

1. Se construyen la mediatriz de MN; que corta al eje focal en el centro O de la cónica pedida.
2. La circunferencia principal, con centro en O y que pasa por M, corta a la tangente dada t, en D y E.
3. Las perpendiculares a t por D y E, cortan al eje focal en los focos F y F′ de la cónica a construir.
4. La cónica ya puede ser construida, pues se conocen dos focos y una tangente (FFt).

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

54. Parábola: dado el eje y una tangente en un punto ($e_1t_PC_p$)

Para construir la parábola de la que se conocen el eje, una tangente t, y su punto de tangencia P, procederemos como sigue:

1. Se traza la paralela al eje por P, y se determina su simétrica respecto a la tangente t.
2. Esta última recta corta al eje en el foco F de la parábola.
3. Construimos el simétrico S del foco F, respecto a la tangente t.
4. La perpendicular al eje por S es la directirz d de la parábola a determinar.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

55. Cónica: conocidos dos focos y una tangente (FFt)

Para construir la cónica de la que se conocen dos focos, F y F′, y una tangente t, procederemos como sigue:

1. Se construye el simétrico S, respeto a la tangente t, de un foco F.
2. Trazamos la recta que pasa por S y el otro foco F′.
3. El punto de intersección P de la tangente t con la recta SF′ pertenece a la cónica.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

56. Hipérbola: dado un foco, una asíntota

y una tangente (Fht)

Para construir la hipérbola de la que se conocen un foco F, una tangente t, y una asíntota h, procederemos como sigue:

1. Se construyen los simétricos S_t y S_h de F, respeto a la tangente t y a la asíntota h, respectivamente.
2. El otro foco F′ ha de estar en la mediatriz de S_tS_h y también en la recta que pasa por S_h y por el punto de tangencia de la asíntota (en el infinito), es decir, en la paralela por S_h a la asíntota h.
3. El punto de intersección P de la tangente t con la recta S_tEl punto de intersección P de la tangente t con la recta S_tF' pertenece a la hipérbola. pertenece a la hipérbola.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

57. Parábola: dado el foco y dos puntos (FPPC$_p$)

Para construir la parábola de la que se conoce el foco F y dos puntos P_1 y P_2, procederemos de la siguiente forma:

- Como un punto de la parábola equidista del foco y de la directriz:

1. Trazamos las circunferencias $P_1(FP_1)$ y $P_2(FP_2)$ de centros en P_1 y P_2 y de radios FP_1 y FP_2, respectivamente.
2. Las tangentes comunes a estas dos circunferencias son las directrices de las dos parábolas solución.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

58. Cónica: dado un foco y tres puntos (FPPP)

Para construir la cónica de la que se conoce un foco F y tres puntos, P_1, P_2 y P_3, procederemos de la siguiente forma (Quim Castellsaguer.- Todo Triágulos Web):

1. Sea F* el isogonal de F, respecto al triángulo $\Delta P_1P_2P_3$
2. Sea ΔA*B*C* el triángulo pedal de F*.
3. Sea $\Delta A_1B_2C_3$ el triángulo de contacto interior de A*B*C*.
4. La perpendicular por P_1 a F^*A_1 y sus análogas limitan un triángulo ΔA′B′C′, cuyos lados son tangentes, t_1, t_2 y t_3, a la cónica buscada en los puntos P_1, P_2 y P_3, respectivamente.

5. Sean S_1 y S_2 los puntos simétricos del foco F respecto a las tangentes t_1 y t_2, rspectivamente.
6. Las rectas P_1S_1 y P_2S_2 se cortan en el otro foco F'.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

59. Cónicas: dado un foco, dos puntos y una tangente (FPPt)

Para construir la cónica de la que se conocen un foco F, dos puntos, P_1 y P_2, y una tangente t, procederemos como sigue:

- Las circunferencias $P_1(P_1F)$ y $P_2(P_2F)$, de centros P_1 y P_2, respectivamente, y que pasa por el foco F, son tangentes a la circunferencia focal relativa al otro foco, que pasa por el punto simétrico del foco F respecto a la tangente dada t.

1. Se construyen el simétrico S, respeto a la tangente t, del foco dado F.
2. Se traza cada una de las circunferencias que pasan por S y son tangentes a las circunferencias $P_1(P_1F)$ y $P_2(P_2F)$ (Problema de Apolonio Pcc:.). El centro de cada una es el otro foco de la cónica pedida.

- Si las circunferencias $P_1(P_1F)$ y $P_2(P_2F)$ son ambas exteriores a una de la circunferencia obtenida, la cónica de focos en F y en el cento de esta circunferencia, y que pasa por P_1 (también por P_2), es una hipérbola.

- Si las circunferencias $P_1(P_1F)$ y $P_2(P_2F)$ son ambas interiores a una de la circunferencia obtenida, la cónica de focos en F y en el cento de esta circunferencia, y que pasa por P_1 (también por P_2), es una elipse.

3. La cónica buscada será parábola cuando una recta tangente común a las circunferencias $P_1(P_1F)$ y $P_2(P_2F)$ pasa por S, dejando estas dos circunferencias en un mismo semiplano respecto a tal tangente común (que es la directriz de la parábola).

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

60. Parábola: dado el foco, un punto y un punto de la directriz (FPQ∈dC$_p$)

Para construir la parábola de la que se conoce su foco F, uno punto P y un punto de la directriz Q, procedemos como sigue:

- El punto P equidista del foco F y de su directriz, por lo que ésta ha de ser tangente a la circunferencia P(PF) de centro en P y radio PF.

1. Trazamos la circunferencia P(PF)
2. Desde el punto Q trazamos las tangentes d_1 y d_2 a la circunferencia P(PF)-

- Si el punto Q es exterior a la circunferencia P(PF), hay dos soluciones; si está sobre ella, hay una sola; y si Q es interior, el problema no tiene solución.
  Si el foco F está en la circunferencia de diámetro PQ, una de las parábolas se reduce a la semirrecta PQ.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

61. Parábolas: dado el foco, un punto y una tangente (FPtC$_p$)

Para construir la parábola de la que se conocen el foco F, un punto P y una tangente t, procederemos como sigue:

1. Se construye el simétrico S (que estará en la directriz) del foco F, respecto a la tangente t.
2. Las tangentes a la circunferencia P(PF) desde S son las directrices d_1 y d_2 de las parábolas solución.

- Si S es exterior a la circunferencia P(PF), hay dos parábolas; si S está sobre P(PF), hay una sola parábola; y si S es interior a P(PF) no hay solución.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

62. Cónicas: dada un foco, un punto y dos tangentes (FPtt)

Para construir la cónica de la que se conocen un foco F, un punto P y dos tangentes t_1 y t_2, procederemos como sigue:

- La circunferencia P(PF), de centro P y que pasa por el foco F, es tangente a la circunferencia focal relativa al otro foco, que pasa por los puntos simétricos, S_1 y S_2, del foco F respecto a las tangentes dadas t_1 y t_2.

1. Se construyen los simétrico S_1 y S_2, respeto a las tangentes t_1 y t_2, del foco dado F.
2. Se trazan las circunferencias que pasan por S_1 y S_2 y son tangentes a la circunferencia P(PF) (Problema de Apolonio PPc: Circunferencia que pasa por dos puntos y

es tangente a una circunferencia.). Sean I y J los puntos de tangencia.

3. Los centros de estas circunferencias son los otros posibles focos, F_I y F_J de sendas cónicas, con el foco F y el punto P comunes.

- La cónica buscada será parábola cuando la circunferencia P(PF) es tangente a la recta S_1S_2, es decir, cuando la distancia de P a F y dicha recta sean iguales.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

63. Parábola: dado el foco, una tangente y el punto de tangencia (Ft_pC_p)

Para construir la parábola de la que se conoce el foco F, una tangente t y el punto de tangencia P, procederemos de la siguiente forma:

1. Construimos el punto S, simétrico del foco F respecto a la tangente dada t.
2. La recta que une S con el punto de tangencia P, tiene la dirección del eje; luego, trazamos la perpendicular a SP por S, que es la directriz de la parábola buscada.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

64. Parábola: dado el foco y dos tangentes $(FttC_p)$

Para construir la parábola de la que se conocen el foco F y dos tangente t, se puede proceder como sigue:

1. Trazamos los simétricos S_1 y S_2 del foco F respecto de las tangentes t_1 y t_2.
2. La recta que pasa por S_1 y S_2 es la directriz d de la parábola.
3. Utilizamos la herramienta parábola de GeoGebra, a partir del foco F y la directriz d.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

65. Cónica: conocidos un foco, dos tangentes y el punto de contacto de una de ellas (Ftt_p)

Para construir la cónica de la que se conocen un foco F, dos tangentes, t y t_P, y el punto P de tangencia de esta última, procederemos como sigue:

1. Se construye los simétrico S_1 y S_2 del foco F, respeto a las tangentes t y t_P, respectivamente.
2. El otro foco F_2 está en la recta PS_2 y, como su circunferencia focal pasa por S_1 y S_2, también está en la mediatriz de S_1S_2.

- Será una parábola si PS_2 y la mediatriz de S_1S_2 son paralelas (es decir, si P coincide con el punto Q de la figura).

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

66. Cónica: dado un foco y tres tangentes (Fttt)

Para construir la cónica de la que se conocen un foco F y tres tangentes, t_1, t_2 y t_3, procederemos como sigue:

1. Se construyen los simétrico S_1, S_2 y S_3 del foco F, respeto a las tangentes t_1, t_2 y t_3, respectivamente.
2. El centro de la circunferencia que pasa por S_1, S_2 y S_3 es el otro foco F'.
3. Los puntos de intersección P_1, P_2 y P_3 de las tangentes t_1, t_2 y t_3 con las rectas $F'S_1$, $F'S_2$ y $F'S_3$ pertenecen a la cónica.

- Nota: Los dos focos son conjugados isogonales, respecto al triángulo delimitados por las tres tangentes t_1, t_2 y t_3.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

67. Cónica: dado un foco, el simétrico del otro foco respecto de una tangente y el pie de la perpendicular a la tangente por el segundo foco ($FS\pi_tF$)

Para construir la cónica de la que se conoce un foco F, el simétrico del otro foco, respecto de una tangente, S', y el pie de la perpendicular a la tangente por el segundo foco π_tF', procederemos de la siguiente forma:

1. Trazamos la recta δ que une S' con π_tF'.
2. Trazamos la recta t perpendicular a δ por π_tF', que será tangente a la cónica.

3. Obtenemos el segundo foco F′, dibujando el simétrico de S′ respecto de t.

- Ya tenemos dos focos, ahora calculemos un punto de la cónica.

4. Trazamos la recta que une F con S′. La intersección de esta recta con la tangente t nos proporciona el punto de tangencia P que está en la cónica.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

68. Hipérbola: dado un punto y las dos asíntotas (hhP)

Para construir la hipérbola de la que se conocen un punto P y las dos asíntotas h_1 y h_2, procederemos como sigue:

- Utilizamos el caso límite del Teorema de Pascal para hallar el otro punto de la hipérbola de una recta que pase por P.

1. Pertenece a la hipérbola el punto P′ simétrico de P respecto su centro O, intersección de las dos asíntotas.

- Consideramos el pentágono inscrito en la hipérbola a construir con vértices en P, punto del infinito de h_2, punto del infinito de h_1, P′ y P_1 (a determinar, sobre una recta δ que pase por P y que no contenga a ninguno de los puntos anteriores). A este pentágono junto con la asíntota h_1 (tangente en el infinito a la hipérbola) le aplicamos el Teorema de Pascal.

2. Trazamos la Recta de Pascal que pasa por $\delta \cap h_1$ y por el punto de intersección de la paralela a h_1 por P′ con la paralela a h_2 por P.

- Como la recta del infinito y la recta $P'P_1$ se han de cortar en la recta de Pascal:

3. Se traza la paralela a la recta de Pascal por P′, y donde corte a δ es el nuevo punto P_1 de la hipérbola.
4. Pertenece a la hipérbola el punto P'_1 simétrico de P respecto su centro O.
5. Un punto más P_2 de la hipérbola se obtiene partiendo de otra recta, distinta de δ, que pase por P, e intercambiando las asíntotas, es decir, ahora la tangente (en el infinito) que tomamos es la asíntota h_2

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

69. Hipérbola: dado un punto y las dos asíntotas (hhP(2))

Otro procedimiento para construir la hipérbola de la que se conocen un punto P y las dos asíntotas h_1 y h_2, está basado en el siguiente resultado:

- "En una hipérbola, la paralela al eje focal por uno de sus puntos P, corta a las asíntotas en los puntos M (el más cercano a P) y en N (el más alejado de P), entonces una cualquiera de las semicircunferencias de diámetro PN y la recta perpendicular al eje focal por el punto M se cortan en en un punto Q, tal que PQ=a (longitud del semieeje focal).".

1. El centro de la hipérbola es el punto O de intersección de las asíntotas, h_1 y h_2.

- El eje focal es la bisectriz de las asíntotas que está en el cuadrante que ellas determinan, donde está el punto dado P.

2. Para construir esta bisectriz, trazamos las rectas paralelas a las asíntotas que pasa por P, que las cortan en los puntos H_1 y H_2. El eje focal es la bisectriz del ángulo ∠H_1OH_2.
3. Trazamos la paralela al eje por el punto P.
4. Sean Q_1 y Q_2 los puntos de corte de esta paralela con las asíntotas, h_1 y h_2, respectivamente.
5. Trazamos una semicircunferencia de diámetro PQ_1, y la recta perpendicular al eje focal por Q_2. Sea M_1 el punto de intersección de ambas.
6. Trazamos una semicircunferencia de diámetro PQ_2, y la recta perpendicular al eje focal por Q_1. Sea M_2 el punto de intersección de ambas.
7. El segmento PM_1 o el PM_2, (según que exista M_1 o M_2) tiene la longitud a del semieje focal de la hipérbola.
8. La circunferencia O(a), de centro O y radio a, corta al eje focal en los vértices de la hipérbola
9. La perpendicular por uno de los vértices corta a una asíntota en un punto, cuya distancia al centro es la semidistancia focal c.
10. Finalmente, la circunfercia O(c) corta al eeje focal en los focos de la hipérbola; la cual queda determinada por cpnocer uno de sus puntos, P.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

70. Hipérbola: dado tres puntos y las direcciones de sus asíntotas (llPPP)

Para determinar más puntos de la hipérbola de la que se conocen tres puntos, P_1, P_2 y P_3 y la dirección de las asíntotas,**u** y **v**, procedemos como sigue:

1. Trazamos una recta P_1M, que no contenga a P_2, ni a P_2 y que no sea paralela a las direcciones de las asíntotas. Denotamos por P el otro punto (a determinar) de intersección con la hipérbola, distinto de P_1.

- Aplicamos el Teorema de Pascal al hexágono de lados P_1P_2, P_2P_3, paralela por P_3 al vector **v** (dirección de una asíntota), recta del infinito, paralela por P al vector **u** (dirección de la otra asíntota) y la recta P_1M.

2. Dos lados opuestos, P_1M y la paralela por P_3 al vector **v**, se cortan en el punto A.
3. Otros dos lados opuestos, P_1P_2 y la recta del infinito, tienen en común el punto del infinito de P_1P_2.
4. La recta de Pascal es la parelela a P_1P_2 por A.
5. La recta de Pascal y el lado P_2P_3 se cortan en el punto C.
6. La recta que pasa por C y de dirección **u**, corta a P_1M en el punto P.

- Al variar al recta P_1M el punto P recorre la hipérbola.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

71. Parábola: dado la dirección del eje y tres puntos (IPPPC$_p$)

Para construir la parábola de la que se conocen la dirección de su eje y tres puntos, P_1, P_2 y P_3, procederemos como sigue:

- Utilizamos un caso límite del Teorema de Pascal para hallar la tangente en uno de sus puntos. Luego construimos la "Parábola: dado la dirección del eje, un punto y una tangente con su punto de tangencia" (IPt_PC_p).

- Designamos por t_1 la tangente (a determinar) en el punto P_1. Consideramos el hexágono determinado por las seis rectas t_1, P_1P_2, P_2P_3, la paralela por P_3 al eje, la recta del infinito y la paralela por P_1 al eje.

1. La recta de Pascal es la recta paralela a P_1P_2 por el punto de intersección de la recta P_2P_3 con la paralela al eje por P_1.
2. La tangente t_1 en P_1, pasa por el punto de intersección de la recta de Pascal con la paralela al eje por P_3.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

72. Parábola: dado la dirección del eje, un punto y una tangente con su punto de tangencia (IP$t_P$$C_p$)

Para construir la parábola de la que se conocen la dirección del eje, un punto punto, P_1, y una tangente t_P con su punto de tangencia P, procederemos como sigue:

- Podemos encontar el otro punto X de intersección con la parábola de una recta δ, que pasa por P_1 (no paralela a la dirección del eje y que no pasa por P), utilizando un caso límite del Teorema de Pascal, aplicado a los puntos I (punto del infinito del eje), P, P_1, X, a la tangente t_P y a la recta del infinto:

1. La recta de Pascal está determinada por el punto de intersección de δ con la paralela al eje por P, y por el punto de intersección de t_P con la recta paralela al eje por P_1.
2. El punto X es la intersección de la recta δ con la paralela a la recta de Pascal por P.

- Variando la recta δ, obtenemos otros puntos de la parábola.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

73. Parábola: dado la dirección del eje, un punto y una tangente con su punto de tangencia (IP$t_P$$C_p$(2))

Otra forma de construir la parábola de la que se conocen la dirección del eje, un punto punto, P_1, y una tangente t_P con su punto de tangencia P, puede ser la siguiente:

- Utilizaremos el siguiente resultado:
  "En una parábola, la tangente t en un punto arbitrario corta a la tangente t_P, en un punto P, en el punto medio M de PQ, siendo Q el punto de intersección de t_P con la recta paralela al eje por el punto de tangencia de t."

1. Trazamos la recta reflexión de la paralela a la dirección del eje por P, respecto a la tangente t_P. En ella ha de estar el foco F de la parábola a construir.
2. Trazamos la tangente t_{P_1} en P_1, que pasa por el punto

medio de PQ (Q el punto de intersección de t_P con la recta paralela al eje por el punto P_1).
3. Trazamos la recta reflexión de la paralela a la dirección del eje por P_1, respecto a la tangente t_{P_1}. En ella ha de estar también el foco F de la parábola a construir.
4. Construido el foco F, determinamos su simétrico S respecto a t_P, que está en la directriz (perpendicular a la dirección del eje).

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

74. Cónica: dado un punto del infinito. dos tangentes y sus puntos de tangencia (It_pt_p)

Para construir una cónica de la que se conoce un punto del infinito I, dos tangentes t_1 y t_2 y sus puntos de tangencia P_1 y P_2:

- (Es una situación particular del caso Pt_pt_P) Hallamos el otro punto X de intersección de la cónica con una recta δ que pasa por I (que no pasa por P_1 ni por P_2); para ello utilizamos un caso límite del Teorema de Pascal, aplicado al "hexágono" de lados t_1, P_1P_2, t_2, P_2I,δ, IX y XP_1.

1. Trazamos una recta δ por I (cuya dirección es la de un vector u dado).
2. Los puntos $t_1 \cap IP_2$ y $P_1P_2 \cap \delta$: determinan la recta de Pascal.
3. El punto de intersección de ésta con t_2 lo unimos con P_1.
4. La recta resultante corta a δ en un punto X de la cónica buscada.

- Repitiendo el proceso con otra recta, obtenemos un quinto punto de la cónica, que ya puede ser construida.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

75. Parábola: dado la dirección del eje y tres tangentes $(ItttC_p)$

Para construir la parábola de la que se conoce su punto del infinito I (dado por la dirección de su eje) y tres tangentes t_1, t_2 y t_3, utilizamos el teorema de Brianchon para determinar los puntos de tangencia de las tangentes dadas.

- Consideremos el pentágono cuyos vértices los tomamos en este orden: el punto de intersección de las tangentes t_1 y t_2, el punto de intersección de las tangentes t_2 y t_3, el punto del infinito de la tangente t_3, el punto del infinito de la parábola y el punto del infinito de la tangente t_1.

1. El punto P_1 de tangencia de la tangente t_1 está en la recta que une el 3º con el punto de intersección de las rectas 14 y 25.
2. El punto P_2 de tangencia de la tangente t_2 está en la recta paralela al eje que pasa por el punto de intersección de las rectas 13 y 25.
3. Ya podemos utilizar cualquiera de los tres casos de construcción de una parábola: IPt_PC_p, IPt_PC_p(2), t_Pt_PC_p.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

76. Cónica hiperosculatriz a una cónica dada en uno de sus puntos y que pasa por un punto (PPCxx)

Para construir la cónica hiperosculatriz a una cónica dada γ, en uno de sus puntos P_0 y que pasa por el punto P, utilizaremos el Teorema de Desargues:

Sea Φ un haz de cónicas y δ una recta que no pasa por ninguno de los puntos bases del haz. Si M es un punto de la recta δ y γ_M es la cónica del haz Φ pasando por el punto M y M′ el segundo punto de intersección de la cónica γ_M con la recta δ. La aplicación que al punto M ler asocia el punto M′ es una involución sobre la recta δ

- Consideremos el haz de cónicas determinado por la cónica γ y la cónica degenerada que consta de la recta tangente t a γ en P, tomada dos veces.

1. Tomamos dos puntos 1 y 2 (distintos de P_0) sobre la cónica γ.
2. Construimos el punto M, de intersección de la tangente t con la recta que pasa por los puntos 1 y P.
3. Así mismo, construimos el punto N, de intersección de la tangente t con la recta que pasa por los puntos 2 y P.
4. Sea Q_1 el segundo punto de intersección, con la cónica γ, de la recta que pasa por los puntos 1 y P.
5. Y Q_2 el segundo punto de intersección, con la cónica γ, de la recta que pasa por los puntos 2 y P.
6. El transformado P_1 de P en la involución de punto fijo M y puntos conjugados 1 y Q_1, pertenece a la cónica γ_P del haz, que pasa por P.

7. El transformado P_2 de P en la involución de punto fijo N y puntos conjugados 2 y Q_2, pertenece a la cónica γ_P del haz, que pasa por P.
8. De la cónica pedida ya conocemos cuatro puntos P_0, P_1, P_2 y P, y la tangente t en P_0 ($PPPt_P$), por lo que ya puede ser construida.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

77. Cónica: dada por cinco puntos (PPPPP)

Para construir la cónica, por puntos, de la que se conocen cinco puntos, procederemos como sigue:

- Utilizaremos el Teorema de Pascal:
  "Si un hexágono se encuentra inscrito en una cónica, los tres puntos en los que se intersecan los lados opuestos están sobre una recta, denominada la recta de Pascal"

- Dados cinco puntos P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 de una cónica, si P es el otro punto en la cónica de intersección con una recta δ que pasa por P_5, los puntos P, P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 determinan un hexágono inscrito en ella, cuya recta de Pascal pasa por:

1. El punto L de intersección de los lados opuestos P_1P_2 y P_4P_5.
2. El punto M de intersección de los lados opuestos P_2P_3 y δ.
3. Determinamos ahora el punto N de intersección del lado P_3P_4 con la recta de Pascal, LM.
4. El punto P buscado es la intersección de la recta δ con la recta NP_1.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

78. Cónica: dada por cinco puntos (PPPPP(2))

Para construir la cónica, por puntos, de la que se conocen cinco puntos, P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5, podemos utilizar la construcción de MacLaurin, que se basa en el siguiente resultado:

- "El lugar geométrico que describe un vértice C de un triángulo variable, cuando los lados pasan por tres puntos fijos, D, E y F, y los dos vértices restantes, A y B,se apoyan en sendan rectas dadas, es una cónica."

- La construcción de Colin Maclaurin (1698-1746), está descrita en "Introduction to Projective Geometry" by C.

R. Wylie, Jr. (Dover, 2008)

1. Las rectas P_1P_2 y P_1P_3 son las rectas fijas que tomaremos.
2. Se traza la recta P_2P_4 y su punto de intersección con P_1P_3.
3. Se traza la recta P_3P_4 y su punto de intersección con P_1P_2.
4. Denotamos por d_4 la recta que pasa por los dos últimos puntos obtenidos.
5. Se traza la recta P_2P_5 y su punto de intersección con P_1P_3.
6. Se traza la recta P_3P_5 y su punto de intersección con P_1P_2.
7. Denotamos por d_5 la recta que pasa por los dos últimos puntos obtenidos.
8. Construimos el punto L de corte de las rectas d_4 y d_5.
9. Tomamos un punto variabel M sobre la recta P_1P_3 y trazamos la recta LM, que corta a P_1P_2 en el punto N.
10. Las rectas MP_2 y NP_3 se cortan en un punto de la cónica que pasa por los cinco puntos dados.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

79. Cónica que pasa por tres puntos y por los puntos de intersección (reales o imaginarios) de una recta y de una circunferencia (PPPPiPi)

Para construir la cónica Φ que pasa por tres puntos, P_1, P_2, P_3, y por los puntos de intersección (reales o imaginarios) de una recta δ y de una circunferencia Γ vamos a trazar la tangente t_1 en P_1 y hallar otro punto P de Φ. Luego, utilizar el caso (PPPt$_P$) de determinar la cónica de la que se conocen cuatro puntos y la tangente en uno de ellos.

- Para determinar la tangente en P_1, utilizamos el siguente resultado:

"Sean P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 cinco puntos de una cónica. Si M es el punto de intersección de las rectas P_2P_3 y P_4P_5, la tangente en el punto P_1 es la transformada de la recta P_1M en la involución que transforma P_1P_2 en P_1P_3 y P_1P_4 en P_1P_5."

1. Determinamos los puntos K, L y M de la recta δ con las rectas P_1P_2, P_1P_3 y P_2P_3.

2. Se construye el punto T transformado de M en la involución de puntos conjugados K y L, y los dos de intersección de δ y Γ.
3. La tangente t_1 en P_1 a Φ es la recta P_1T.

- Ahora determinamos otro punto P de la cónica Φ, para ello construimos:

4. El punto U conjugado armónico de M respecto a P_2 y P_3.
5. El punto V conjugado armónico de M respecto a los dos de intersección de δ y Γ.
6. La recta UV, que es la polar de M respecto a al cónica Φ.
7. El punto W, intersección de UV y P_1M.
8. Finalmente, el punto P, conjugado armónico de P_1 respecto a M y W, es otro punto de la cónica Φ.
9. La cónica Φ queda determinada por los puntos P_1, P_2, P_3 y P y por la tangnete t_1 en P_1.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

80. Cónica: dado cuatro puntos y una tangente (PPPPt)

Para construir la cónica de la que se conocen cuatro puntos P_1, P_2, P_3 y P_4, y una tangente t, procederemos como sigue:

- Utilizaremos el Teorema de Desargues:
  Dada una cónica y un cuadrivértice inscrito en ella, toda recta que sea secante a la cónica, sin pasar por ninguno de los vértices del cuadrivértice, corta a la cónica y a los lados opuestos del cuadrivértice en pares de puntos homólogos en una misma involución.
  Para haces de cónicas: "Los pares de puntos de intersección de una recta con las cónicas de un haz, que no pasa por ningún de los puntos bases, pertenecen a una misma involución".

1. Sean X, X′, Y, Y′ los puntos en los que las rectas P_1P_2, P_3P_3, P_2P_3 y P_4P_1 cortan a la tangente t.
2. Construimos los puntos dobles, T_1 y T_2, de la involución sobre t que tiene como pares de puntos conjugados (X,X′), (Y,Y′).
3. Las cónicas que pasan por los cinco puntos P_1, P_2, P_3, P_4, T_1 y P_1, P_2, P_3, P_4, T_2, respectivamente, son las cónicas solución del problema..

- Existen dos soluciones o ninguna si la involución tiene dos puntos dobles o ninguno.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

81. Cónica: dado cuatro puntos y la tangente en uno de ellos (PPPt$_P$)

Para construir la cónica de la que se conocen cuatro puntos P, P_1, P_2 y P_3, y la tangente t_P en P, procederemos como sigue:

- Utilizaremos el Teorema de Pascal:
  Dados cuatro puntos P, P_1, P_2 y P_3 de una cónica, si P es el punto de tangencia de la tangente dada t_P, sea δ una recta que pasa por P_1 (no pasando por ninguno de los puntos P, P_2, P_3 y P_4). Vamos a construir el segundo punto X de intersección de la recta δ con la cónica a determinar. Para ello consideremos el caso limite del Teorema de Pascal, cuando dos lados consecutivos coinciden en la tangente en punto de la cónica.

1. El punto L de intersección de los lados opuestos δ y t_P.
2. El punto M de intersección de los lados opuestos PP_2 y P_1P_3.
3. Determinamos ahora el punto N de intersección del lado PP_3 con la recta de Pascal, LM.
4. El punto X buscado es la intersección de la recta δ con la recta NP_2.

- Ya tenemos cinco puntos, P, P_1, P_2, P_3 y X, de la cónica, por lo ésta ya puede construirse.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

82. Cónica: dado tres puntos y dos tangentes (PPPtt)

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

83. Cónica: dado tres puntos y la tangente en uno de ellos y otra tangente (PPt$_p$t)

Para construir la cónica de la que se conocen tres puntos, P, P_1 y P_2, una tangente, t_P en P y otra tangente t:

- Utilizaremos el Teorema de Desargues:
  Dada una cónica y un cuadrivértice inscrito en ella, toda

recta que sea secante a la cónica, sin pasar por ninguno de los vértices del cuadrivértice, corta a la cónica y a los lados opuestos del cuadrivértice en pares de puntos homólogos en una misma involución.

1. Sean X e Y los punto de intersección de la recta P_1P_2 con las tangentes t_P y t, respectivamente.
2. Se construyen los puntos dobles D_1 y D_2 de la involución con pares de puntos conjugados (P_1, P_2), (X, Y).
3. La recta PD_1 corta a t en T_1, punto de tangencia de una cónica solución.
4. La recta PD_2 corta a t en T_2, punto de tangencia de la otra cónica solución.

- Existen dos solucione si P_1 y P_2 están en el interior del mismo ángulo determinado por las tangentes dadas o si están en el interior de los ángulos opuestos por el vértice. En los otros casos la involución carece de puntos dobles y no existe solución.

- La construcción se termina mediante los casos "Cónica, dados cuatro puntos y la tangente en uno de ellos" (PPPt_P) o "Cónica dados tres puntos y las tangentes en dos de ellos" (Pt_Pt_P).

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

84. Cónica: dado tres puntos y las tangentes en dos de ellos $_{(Pt_pt_p)}$

Para construir la cónica de la que se conocen tres puntos, P, P_1 y P_2 y las tangentes , t_1 y t_2 en P_1 y P_2, respectivamente.

- Hallamos el otro punto X de intersección de la cónica con una recta δ que pasa por P (que no pasa por P_1 ni por P_2); para ello utilizamos un caso límite del Teorema de Pascal, aplicado al "hexágono" de lados P_1P, δ, XP_2, t_2, P_2P_1 y t_1.

1. Trazamos una recta δ por P.
2. Los puntos $PP_1 \cap t_2$ y $P_1P_2 \cap \delta$: determinan la recta de Pascal.
3. El punto de intersección de ésta con t_1 lo unimos con P_2.
4. La recta resultante corta a δ en un punto X de la cónica buscada.

- Repitiendo el proceso con otra recta, obtenemos un quinto punto de la cónica, que ya puede ser construida.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

85. Parábola: dado un punto, la tangente en el vértice y otra tangente. (Ptt_AC_p)

Para construir la parábola de la que se conoce un punto P, la tangente en el vértice t (no se conoce necesariamente éste) y otra tangente t_1.

1. Se traza la recta δ perpendicular a la tangente t_1 por el punto E de intersección con la tangente en el vértice t; en ella ha de estar el foco de la parábola a construir.

- Si el foco de una parábola de la que se pide construir es un punto M de δ, su vértice es la proyección ortogonal N de M sobre t.
  Sea Q la proyección ortogonal de P sobre la tangente t, entonces si la parábola, de foco M y vértice N, pasa por P, la tangente p en P pasa por el punto medio de NQ.
  La posición de punto M ha de ser tal que la circunferencia circunscrita al triángulo formado por las tres tangentes, t, t_1 y p, debe pasar por M.

2. Trazamos la circunferencia Γ_M que pasa por M, E y el punto de corte de $t \cap p$. El foco válido ha de ser tal que Γ_M ha de pasar por el punto $t_1 \cap p$.

- Sea X el otro punto de intersección de p con Γ_M. Cuando M recorre δ, el punto X describe una circunferencia Ψ, que pasa por P, por el punto T (intersección de δ con la recta perpendicular a t por P), que corresponde a M=T, y por el punto R (punto X, cuando M=E).

  Para obtener el punto R, trazamos la circunferencia tangente en E a la recta δ y que pasa por el punto medio de QE. El punto R es otro punto de intersección de esta circunferencia con la recta que pasa por el punto medio de QE y por P.

Focos M convenientes son aquellos para los que el punto X coincide con uno de los puntos U y V de intersección de t_1 con Ψ.

3. La recta PU es tangente a una parábola solución, cuyo vértice es el punto simétrico de Q, respecto al punto $t \cap PU$.
4. La recta PV es tangente a otra parábola solución, cuyo vértice es el punto simétrico de Q, respecto al punto $t \cap PV$.

- EJEMPLO: Las parábolas tangentes en sus vértices al eje OY, tangentes a la primera diagonal y que pasan por el punto (8,6), tiene por ecuaciones: $(y+2)^2=8x$ y $(y+18)^2=72x$.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

86. Hipérbola: dado un punto en una asíntota, otro punto en la otra asíntota, una recta que pasa por el centro y la razón b/a (PxxxxC$_h$)

Para construir la hipérbola de la que se conoce uno de sus puntos P, dos puntos H_1 y H_2, uno en cada una de sus asíntotas; una recta δ que pasa por su centro, y la razón entre las longitudes de su semieje secundario y su semieje focal, b/a, debemos tener en cuenta que:

- La razón b/a es la pendiente de una asíntota respecto a su eje focal; luego, las asíntotas forman un ángulo 2α=2 arctan(b/a). Así, el segmento H_1H_2 se ve desde el centro de la hipérbola bajo el ángulo 2α.

1. Trazamos el arco capaz sobre el segmento H_1H_2 de ángulo 2α.
2. Si O es un punto de intersección de este arco capaz con la recta δ dada, que pasa por el centro, las asíntotas son las rectas OH_1 y OH_2.
3. Acudiendo al caso de construcción de una hipérbola conocido las dos asíntotas y un punto (hhP(2)), resolvemos el problema.

Solo hemos construido la hipérbola correspondiente a un punto de intersección de δ con el arco capaz en cuestión. Para otro punto de intersección, la construcción es análoga.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

87. Parábola: dado dos tangentes y sus puntos de tangencia (t$_p$t$_p$C$_p$)

Para construir la parábola de la que se conocen dos tangentes, t_1 y t_2, y sus puntos de tangencia, P_1 y P_2, procederemos como sigue:

- Utilizaremos el Teorema de Brianchon, para el caso del hexágono circunscrito a la parábola, formado por las rectas t_1, P_1P_2, t_2, la recta paralela al eje por P_2, la recta del infinito y la recta paralela al eje por P_1.

1. Obtenemos el punto de Brianchon, de intersección de la paralela a t_2 por P_1, con la paralela a t_1 por P_2.
2. La dirección del eje de la parábola es la de la recta que

une el punto de Brianchon con el de intersección de las tangentes t_1 y t_2.
3. Ya podemos determinar la "Parábola: dado la dirección del eje, un punto y una tangente con su punto de tangencia" (IPt_PC_p).

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

88. Parábola: dado la tangente en el vértice y otras dos (ttt$_A$C$_p$)

Para construir la parábola de la que se conocen la tangente en el vértice t, y otras dos tangentes t_1 y t_2 (no se conoce el vértice de antemano), procederemos como sigue:

- Usaremos que la proyección ortogonal del foco de una parábola sobre una tangente está en la tangente en su vértice.

1. Por los puntos de intersección de la tangente en el vértice t, con cada una de las otras tangentes dadas, t_1 y t_2, se trazan las perpendiculares a cada una de las tangentes t_1 y t_2.
2. El punto de intersección de tales perpendiculares es el foco F de la parábola buscada.
3. La paralela a la tangente en el vértice t, por el simétrico de F respecto a t, es la directriz de la parábola. (dFC$_p$(1)).

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

89. Parábola: dado tres tangentes y la razón de distancias de un foco a dos de ellas (tttρC$_p$)

Para construir la parábola de la que se conocen tres tangentes t_1, t_2 y t_3 y la razón de distancias de su foco a dos de ellas ρ, se puede proceder como sigue:

- Sea ΔMNL el triángulo formado por las tres tengentes dadas. El foco de la parábola ha de estar en la circunferencia Γ circunscrita a ΔLMN

- En el supuesto de que la razón de distancias dada ρ sea del foco a las tangentes t_1, t_2:

1. Trazamos las paralelas a la tangente t_1 a una distancia 1 y las paralelas a t_2 a una distancia ρ

- El foco de la parábola estará en las diagonales, NQ_1 y NQ_2, del paralelogramo formado por las cuatro rectas paralelas a t_1 y t_2 , trazadas.

2. Los focos F_1 y F_2 de las parábolas solución están en la intersección de la circunferencia Γ con las rectas NQ_1 y NQ_2.
3. Los simétricos S_{11} y S_{12} del foco F_1, respecto a las tangentes t_1 y t_2, determinan la directriz d_1 de una de las parábolas.
4. Los simétricos S_{21} y S_{22} del foco F_2, respecto a las tangentes t_1 y t_2, determinan la directriz d_2 de la otra parábola.

- Nota sobre triángulos:
  Al variar la razón ρ, las directrices de las parábolas obtenidas se cortan en el ortocentro del triángulo ΔMNL. Y la recta F_1F_2, que que contiene a sus focos, pasa por el vértice, correspondiente a N, del triángulo tangencial de ΔMNL.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

90. Parábola: dada por cuatro tangentes

($ttttC_p$)

Para construir la parábola de la que se conocen cuatro tangentes, procederemos como sigue:

- Dadas cuatro tangentes t_1, t_2, t_3 y t_4 de una parábola, designamos por t_5 la recta del infinito que es tangente a la parábola. Determinar el punto de tangencia P_5 de la recta del infinito, es determinar la dirección de su eje.

1. La recta paralela a t_3 y que pasa $t_1 \cap t_2$ y la recta paralela a t_2 y que pasa por $t_3 \cap t_4$ se cortan en el punto de Brianchon W_5.
2. La recta que une $t_1 \cap t_4$ con W_5 tiene la dirección del eje de la parábola.
3. Los puntos de tangencia P_1 y P_4 con las tangentes t_1 y t_4 se determinan como en el caso ttttt .
4. Las rectas paralelas al eje por P_1 y P_4 se reflejan en las respectivas tangentes en dos rectas que se cortan en el foco F de la parábola.
5. La reflexión del foco F en las tangentes t_1 y t_4 dan dos puntos P_1 y P_4 de la directriz ($dFC_p(1)$).

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

91. Cónica: dado cuatro tangentes y el punto de tangencia de una de ellas (tttt$_P$)

Para construir la cónica de la que se conocen la cuatro tangentes, t_1, t_2, t_3 y t_4, y el punto de tangencia, P_1, de una de ellas, t_1, procederemos como sigue:

- Usaremos un caso límite del Teorema de Brianchon, para determinar los puntos de tangencia de las restantes tangentes.
  Para determinar el punto de tangencia P_2 de la tangente t_2:

1. Hallamos el punto de intersección de las rectas que unen los puntos $t_1 \cap t_2$ y $t_3 \cap t_4$ con la recta que une los puntos P_1 y $t_2 \cap t_3$,
2. La recta que une este punto obtenido con el punto $t_1 \cap t_4$, corta a la tangente t_2 en su punto de tangencia P_2.

- Un procedimiento similar nos permite encontar los puntos de tangencia, P_3 y P_4, de las otras tangentes, t_3 y t_4.
  Ya tenemos cuatro puntos, P_1 P_2 P_3 y P_4, de la cónica; para determinar un quinto punto P, situado en una recta δ que pasa por P_1, utilizamos el teorema de Pascal como sigue:

3. La recta de Pascal queda determinada por los puntos $\delta \cap P_3P_4$ y por el punto $t_1 \cap P_2P_3$.
4. Sea el punto de intersección de la recta de Pascal con la recta P_1P_4. La recta que une este punto con P_2, corta a la recta δ en un nuevo P de la cónica.

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra

92. Cónica: dada por cinco tangentes (ttttt)

Para construir la cónica de la que se conocen cinco tangentes, t_1, t_2, t_3, t_4 y t_5, procederemos como sigue:

- Utilizaremos el Teorema de Brianchon:
  Dadas cinco tangentes t_1, t_2, t_3, t_4 y t_5 de una cónica, para determinar el punto de tangencia P_1 de la recta t_1 con la cónica, utilizamos una situación límite del teorema de Brianchon cuando el hexágono circunscrito se reduce a una pentágono, sustituyendo dos lados consecutivos por una tangente y el vértice donde se cortan dichos lados pasa a ser el punto de tangencia:

1. La recta que une $t_1 \cap t_2$ con $t_4 \cap t_5$ y la recta que une $t_5 \cap t_1$ con $t_2 \cap t_3$ se cortan en el punto de Brianchon W_1.
2. La recta que une $t_3 \cap t_4$ con W_1 corta a la tangente t_1 en el punto de tangencia P_1.

• El mismo procedimiento nos permite encontrar los cuatro puntos de tangencia, P_2, P_3, P_4 y P_5, de las tangentes restantes, t_2, t_3, t_4 y t_5.
Conocidos cinco puntos de la cónica podemos determinar otros puntos, según el caso PPPPP .

(Mostrar/Ocultar figura) Ver la construcción con GeoGebra