Inscribir una circunferencia a dos rectas que se cortan con PostScript

En PostScript, existe un operador (*arcto*) que permite redondear el vértice que determinan dos segmentos que se cortan, mediante un arco de circunferencia de radio deseado. Tal como se describe en el ejemplo siguiente:

Dibujos producidos por el siguiente programa en PostScript:

```
50 20 moveto 200 70 lineto 100 100 lineto
300 0 translate
50 20 moveto 200 70 100 100 20 arcto 100 100 lineto stroke
```

El operador *arcto* deja además en la pila de operandos las coordenadas de los puntos de tangencia del arco de circunferencia con los segmentos en cuestión. Pues bien, podemos aprovechar esta información para resolver el problema geométrico siguiente:

Trazar una circunferenica de radio dado tangente a dos rectas que se cortan.

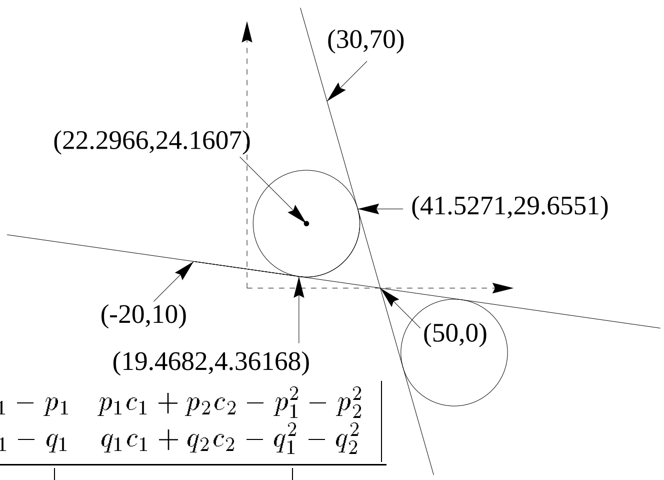
Fijándonos en el dibujo de arriba, sólo nos bastará con determinar el centro de la circunferencia de la que forma parte el arco que redondea el vértice de corte de las dos rectas; utilizando el operador PostScript *arc* se traza tal circunferencia. Dicho centro se calcula intersectando las rectas perpendiculares a las dos dadas en los respectivos puntos de tangencia, cuyas coordenadas las suministra, como hemos dicho, el operdador *arcto*. [1]

Si (c_1, c_2) es el punto de intersección de dos rectas a y b; (a_1, a_2) es otro punto en la recta a y (b_1, b_2) es otro en b; r es el radio de la circunferencia; y si (p_1, p_2) y (q_1, q_2) son los puntos de tangencia en las rectas a y b respectivamente, obtenidos mediantes las siguientes instrucciones PostScript:

```
b1 b2 moveto c1 c2 a1 a2 r arcto
/p2 exch def /p1 exch def /q2 exch def /q1 exch def
```

Las ecuaciones de las rectas a' perpendicular a a por (p_1, p_2) y b' perpendicular a b por (q_1, q_2), son las siguientes

$$a': \ \frac{x - p_1}{c_2 - p_2} = -\frac{y - p_2}{c_1 - p_1} \qquad b': \ \frac{x - q_1}{c_2 - q_2} = -\frac{y - q_2}{c_1 - q_1}$$



Con lo que para encontrar el centro de la circunferencia, debemos resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} (c_1 - p_1)x + (c_2 - p_2)y = p_1(c_1 - p_1) + p_2(c_2 - p_2) \\ (c_1 - q_1)x + (c_2 - q_2)y = q_1(c_1 - q_1) + q_2(c_2 - q_2) \end{array}$$

Así, las cordenadas del centro son:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p_1c_1 + p_2c_2 - p_1^2 - p_2^2 & c_2 - p_2 \\ q_1c_1 + q_2c_2 - q_1^2 - q_2^2 & c_2 - q_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 - p_1 & c_2 - p_2 \\ c_1 - q_1 & c_2 - q_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} c_1 - p_1 & p_1c_1 + p_2c_2 - p_1^2 - p_2^2 \\ c_1 - q_1 & q_1c_1 + q_2c_2 - q_1^2 - q_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 - p_1 & c_2 - p_2 \\ c_1 - q_1 & c_2 - q_2 \end{vmatrix}}$$

En el ejemplo, las coordenadas de los punto son:

$$(a_1, a_2) = (30, 70) \quad (b_1, b_2) = (-20, 10) \quad (c_1, c_2) = (50, 0) \quad (p_1, p_2) = (41.52, 29.65) \quad (q_1, q_2) = (19.46, 4.36)$$

[1] Para redondear un vértice también podemos utilizar el operador *arct*, que no deja en la pila de operandos las coordenadas de los puntos de tangencia; con lo que si no se van a utilizar, es éste el operador más adecuado para redondear un vértice.

El diagrama está incluido usando `\special`, para reproducir el fichero PostScript, que se descirbe a continuación:

```
\special{psfile=cirinscr.eps hoffset=160 voffset=-385}
```

```
%%                 CIRINSCR.EPS

%  Un diagrama de uso del operadpr arcto en  PostScript,  para
% inscribir una circunferencia a dos rectas que se cortan
% Ver CIRINSCR.TEX

%   !`!`NO ES UN FICHERO ENCAPSULADO!!, s\'olo es para no duplicar de nombre
%   al crear cirinscri.ps con DVIPS  apartir de cirinscri.tex

/a1 30 def /a2 70 def  % Punto en la recta a
/b1 -20 def /b2 10 def    % Punto en la recta b  (Sustituyendo por la
%                    l\'\i{}nea siguiente, obtenemos las otras dos circunferencias)
%/b1 50 2 mul -20 sub def /b2 0 2 mul 10 sub  def % Punto en la recta b
/c1 50 def /c2 0 def  %Punto de corte de las dos rectas

/r 20 def  % radio del arco que redondea la punta

/str 20 string def

.1 setlinewidth  % ancho de la l\'\i{}nea de trazo

/Times-Roman findfont 10 scalefont setfont

/fle{gsave
     /long exch def  % Longitud de la flecha
     /giro exch def  % Angulo de giro de flecha
     /yt exch def    % Ordenada de comienzo de la flecha
     /xt exch def    % Abscisa  de comienzo de la flecha
     xt yt translate
     giro rotate
     .1 setlinewidth
     0 0 moveto long 0 rlineto stroke
     long 7 sub  0 moveto -1 -2 rlineto 8 2 rlineto
                 -8 2 rlineto 1 -2 rlineto fill
     grestore } bind def



200 400 translate


b1 b2 moveto c1 c2 a1 a2 r arcto
```

```
/p2 exch def % Ordenada pto. de tang. con a
/p1 exch def % Abscisa pto. de tang. con a
/q2 exch def % Ordenada pto. de tang. con b
/q1 exch def % Abscisa pto. de tang. con b


b1 b2 moveto c1 b1 sub 2.5 mul c2 b2 sub 2.5 mul rlineto    % recta b
b1 b2 moveto c1 b1 sub -1 mul c2 b2 sub -1 mul rlineto

a1 a2 moveto c1 a1 sub 2 mul c2 a2 sub 2 mul rlineto    % recta a
a1 a2 moveto c1 a1 sub -.5 mul c2 a2 sub -.5 mul rlineto

stroke

/P1 c1 p1 sub def
/P2 c2 p2 sub def
/Q1 c1 q1 sub def
/Q2 c2 q2 sub def

/CP p1 c1 mul p2 c2 mul add p1 p1 mul sub p2 p2 mul sub def
/CQ q1 c1 mul q2 c2 mul add q1 q1 mul sub q2 q2 mul sub def

/x CP Q2 mul CQ P2 mul sub  P1 Q2 mul P2 Q1 mul sub div  def
/y CQ P1 mul CP Q1 mul sub  P1 Q2 mul P2 Q1 mul sub div  def

newpath
x y r 0 360 arc stroke  % Circunferenia pedida
x y 1 0 360 arc fill

c1 2 mul x  sub c2 2 mul y sub r 0 360 arc stroke   % Circunferencia opuesta


[2] 0 setdash
0 0 0 100 fle % Eje OX
0 0 90 100 fle % Eje OY
[] 0 setdash

b1 15 sub b2 15 sub 45  15 2 sqrt mul fle
b1 35 sub b2 23 sub moveto
(\() show b1 str cvs show (,) show b2 str cvs show (\)) show

a1 15 add a2 15 add 225  15 2 sqrt mul fle
a1  0 add a2 20 add moveto
(\() show a1 str cvs show (,) show a2 str cvs show (\)) show

c1 15 add c2 15 sub 135  15 2 sqrt mul fle
c1 16 add c2 20 sub moveto
(\() show c1 str cvs show (,) show c2 str cvs show (\)) show

p1 17 add p2 0 add 180  17 fle
```

```
p1 20 add p2 2 sub moveto
(\() show p1 str cvs show (,) show p2 str cvs show (\)) show

q1  0 sub q2 25 sub 90  25 fle
q1 70 sub q2 35 sub moveto
(\() show q1 str cvs show (,) show q2 str cvs show (\)) show

x 25 sub y 25 add -45  25 2 sqrt mul fle
x 95 sub y 28 add moveto
(\() show x str cvs show (,) show y str cvs show (\)) show


showpage
```