Inscribir una circunferencia a un triángulo con PostScript

En PostScript, existe un operador (*arcto*) que permite redondear el vértice que determinan dos segmentos que se cortan, mediante un arco de circunferencia de radio deseado. Tal como se describe en el ejemplo siguiente:

Dibujos producidos por el siguiente programa en PostScript:

```
50 20 moveto 200 70 lineto 100 100 lineto
300 0 translate
50 20 moveto 200 70 100 100 20 arcto 100 100 lineto stroke
```

El operador *arcto* deja además en la pila de operandos las coordenadas de los puntos de tangencia del arco de circunferencia con los segmentos en cuestión. Pues bien, podemos aprovechar esta información para resolver el problema geométrico siguiente:

Trazar la circunferenica inscrita a un triángulo.

Fijándonos en el dibujo de arriba, sólo nos bastará con determinar el centro de la circunferencia de la que forma parte los arcos que redondean los vértices de un triángulo; utilizando el operador PostScript *arc* se traza tal circunferencia. Dicho centro se calcula intersecando las rectas perpendiculares a dos lados en los respectivos puntos de tangencia, cuyas coordenadas las suministra, como hemos dicho, el operdador *arcto*. [1]

Si $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ y $C(c_1, c_2)$ son las coordenadas de los vértices del triángulo. Encontramos los puntos $Q(q_1, q_2)$ y $S(s_1, s_2)$ de tangencia en el lado AB de los arcos que redondean los vértices B y A, respectivamente. Por método de aproximaxión, hacemos que las coordenadas de los puntos Q y S coinciden con un error deseado, con el siguiente programa PostScript:

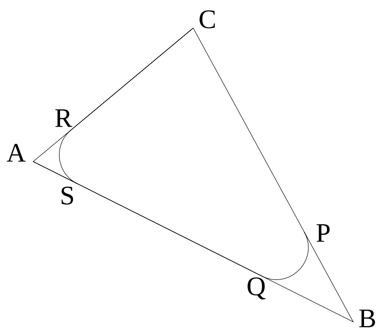
```
/r 0 def                % Radio inicial dela arco que redondea un v\'ertice
/paso 1 def             % Incremento para el radio
/aprox 4 def            % Aproximar hasta las mil\'esimas

/trazar{                % Calcula el centro, traza la circunferencia y tri\'ang.
/P1 b1 p1 sub def
/P2 b2 p2 sub def
/Q1 b1 q1 sub def
/Q2 b2 q2 sub def

/BP p1 b1 mul p2 b2 mul add p1 p1 mul sub p2 p2 mul sub def
/BQ q1 b1 mul q2 b2 mul add q1 q1 mul sub q2 q2 mul sub def

/x BP Q2 mul BQ P2 mul sub  P1 Q2 mul P2 Q1 mul sub div  def
/y BQ P1 mul BP Q1 mul sub  P1 Q2 mul P2 Q1 mul sub div  def

newpath
a1 a2 moveto b1 b2 lineto c1 c2 lineto closepath stroke % Tri\'angulo
newpath
x y r paso sub 0 360 arc stroke  % Circunferenia pedida
        } bind def
```



[1] Para redondear un vértice también podemos utilizar el operador *arct*, que no deja en la pila de operandos las coordenadas de los puntos de tangencia; con lo que si no se van a utilizar, es éste el operador más adecuado para redondear un vértice.

```
/bucle {                 % Bucle para aproximar los puntos de tangencia Q y S
a1 a2 moveto b1 b2  c1 c2 r arcto
/p2 exch def /p1 exch def /q2 exch def /q1 exch def
                        % Coord. de P y Q, puntos de tangencia con BC y AB

c1 c2 moveto a1 a2  b1 b2 r arcto
/s2 exch def /s1 exch def /r2 exch def /r1 exch def
                        % Coord. de S y R, puntos de tangencia con AB y CA
/r r paso add def  % Incrementar el radio del arco de redondeo
s1 q1 gt {exit} if    % Si S queda a la derecha de Q
} bind def

{bucle} loop       % Primera aproximaci\'on, s\'olo hasta las unidades

aprox{                                                 % Seguir aproximando
    /r r 2 paso mul sub def /paso paso 10 div def
    /xx xx 150 add def /yy 50 def                     % S\'olo para pruebas
    {bucle} loop}  repeat

trazar    % Trazar el tri\'angulo y la circunferencia inscrita
```

Las ecuaciones de las rectas a' perpendicular al lado BC por (p_1, p_2) y c' perpendicular al lado AB por (q_1, q_2), son las siguientes

$$a' : \frac{x-p_1}{b_2-p_2} = -\frac{y-p_2}{b_1-p_1} \qquad c' : \frac{x-q_1}{b_2-q_2} = -\frac{y-q_2}{b_1-q_1}$$

Con lo que para encontrar el centro de la circunferencia, debemos resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{c}(b_1-p_1)x+(b_2-p_2)y = p_1(b_1-p_1)+p_2(b_2-p_2)\\(b_1-q_1)x+(b_2-q_2)y = q_1(b_1-q_1)+q_2(b_2-q_2)\end{array}$$

Así, las cordenadas del centro son:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p_1b_1+p_2b_2-p_1^2-p_2^2 & b_2-p_2 \\ q_1b_1+q_2b_2-q_1^2-q_2^2 & b_2-q_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1-p_1 & b_2-p_2 \\ b_1-q_1 & b_2-q_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} b_1-p_1 & p_1b_1+p_2b_2-p_1^2-p_2^2 \\ b_1-q_1 & q_1b_1+q_2b_2-q_1^2-q_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1-p_1 & b_2-p_2 \\ b_1-q_1 & b_2-q_2 \end{vmatrix}}$$