Ecuación implícita de una cónica dada en forma paramétrica

Proposición.- Supóngase que, respecto a coordenadas homogéneas en una referencia cartesiana, un punto $P(x^0, x^1, x^2)$ está dado paramétricamente por

$$\begin{aligned} x^0 &= d_0 t^2 + e_0 t + f_0 \\ x^1 &= d_1 t^2 + e_1 t + f_1 \\ x^2 &= d_2 t^2 + e_2 t + f_2 \end{aligned}$$

donde la matriz

$$M = \begin{pmatrix} d_0 & e_0 & f_0 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \end{pmatrix}$$

es no singular, con matriz traspuesta de la adjunta

$$M^{\#} = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & D_2 \\ E_0 & E_1 & E_2 \\ F_0 & F_1 & F_2 \end{pmatrix}$$

Entonces P queda en la cónica:

$$(E_0x^0+E_1x^1+E_2x^2)^2 = (D_0x^0+D_1x^1+D_2x^2)(F_0x^0+F_1x^1+F_2x^2).$$

En efecto, ya que M es no singular, su determinante Δ es no nulo, y $M^{-1} = \frac{1}{\Delta}M^{\#}$. Sea

$$X = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

con lo que $X = MT$ y $M^{-1}X = T$. Esta última ecuación es equivalente al sistema

$$\begin{array}{ccccccc} D_0x^0 & + & D_1x^1 & + & D_2x^2 & = & \Delta t^2 \\ E_0x^0 & + & E_1x^1 & + & E_2x^2 & = & \Delta t \\ F_0x^0 & + & F_1x^1 & + & F_2x^2 & = & \Delta. \end{array}$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda y la segunda entre la tercera, resulta

$$\frac{D_0x^0 + D_1x^1 + D_2x^2}{E_0x^0 + E_1x^1 + E_2x^2} = \frac{E_0x^0 + E_1x^1 + E_2x^2}{F_0x^0 + F_1x^1 + F_2x^2}.$$