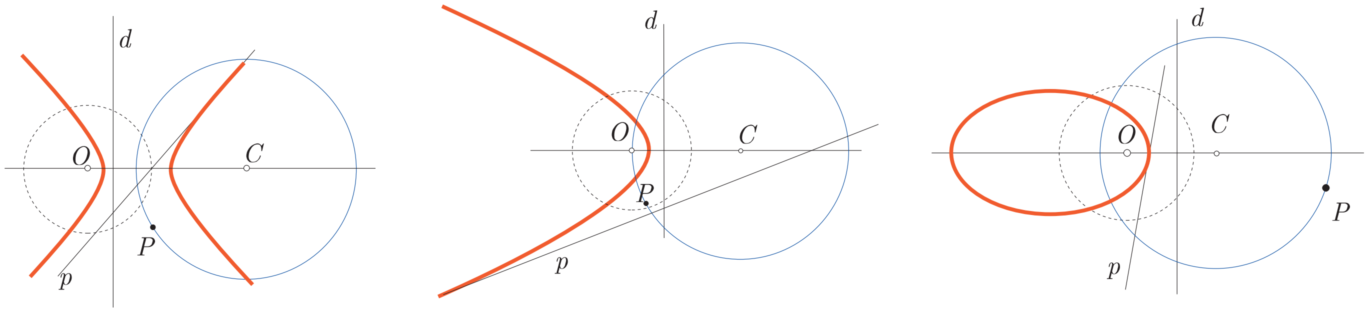
La envolvente de las polares de los puntos de una circunferencia Γ de centro en C, respecto de otra circunferencia Γ_0 de centro en O, es una cónica $\mathcal{C}$, denominada polar recíproca de Γ, respecto a Γ_0. Un foco de $\mathcal{C}$ es O y la directriz correspondiente, es la polar de C. La cónica $\mathcal{C}$ es una elipse, parábola o hipérbola, según que el centro O de Γ_0 sea interior a Γ, esté situado en ella o sea exterior.

SOLUCIÓN:



Sea la circunferencia Γ_0 centrada en el origen O y de radio a y la Γ centrada en $C(c,0)$ y de radio b.

La correspondencia polo-polar es una polaridad. En este caso la matriz asociada la polaridad es la asociada a la circunferencia Γ_0. Las ecuaciones de la polaridad son

$$\rho\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Un punto genérico de la circunferencia Γ es $P(c+b\cos t, b\,\mathrm{sen}\,t)$. Su polar es

$$(c+b\cos t)x + b\,\mathrm{sen}\,t\;y - a^2 = 0.$$

La envolvente de estas rectas, se obtiene eliminando t entre esta ecuación y la que resulta de derivarla, respecto a t: $\mathrm{sen}\,t\;x - \cos t\;y = 0$.

```
Eliminate[{(c+b*u)x+b*v*y-a^2==0,-v*x+u*y==0,u^2+v^2==1},{u,v}]

        -2*a^2*c*x + c^2*x^2 ==   -a^4 + b^2*x^2 + b^2*y^2
```

Se trata de la cónica de ecuación:

$$(c^2-b^2)x^2 - b^2y^2 - 2a^2cx + a^4 = 0,$$

que será una elipse, una hipérbola o una parábola según que $-b^2(c^2-b^2)$ sea positivo, negativo o nulo, respectivamente. O sea, si $c<b$, $c>b$ o $c=b$. Es decir, si O es interior a la circunferencia de centro en C, exterior o está en ella, respectivamente.

Para probar que O es un foco de la cónica obtenida, hay que comprobar que la involución que dicha cónica induce sobre O, es rectangular:

En la polaridad, a una recta que pasa por el origen $mx-y=0$, le corresponde el punto impropio $(0,m,-1)$. Y como la circunferencia Γ induce el la recta del infinito una involución rectangular, en esta involución, al punto $(0,m,-1)$ le corresponde el punto $(0,1,m)$. A este punto le corresponde en la polaridad la recta $x+my=0$, que es perpendicular a la de partida.

Otra forma de ver esto es directamente, utilizando la matriz asociada a la cónica $\mathcal{C}$ obtenida, calculando el polo de la recta $y=mx$, solución del sistema

$$a^4x^0 - a^2cx^1 = 0, \quad -a^2cx^0 + (c^2-b^2)x^1 = m, \quad -b^2x^2 = -1,$$

que es $(b^2,-m,1)$. Así, a la recta de pendiente m, le corresponde la recta de pendiente $-1/m$. La involución inducida sobre O es rectangular: O es un foco.

La directriz de $\mathcal{C}$, relativa a foco O, es la polar de C respecto a Γ_0: en ambos casos da la recta $x=a^2/c$.

Notas adicionales

• El centro de la cónica polar recíproca de Γ respecto a Γ_0, que es $(a^2c/(c^2-b^2),0)$, se obtiene hallando el inverso de O respecto a Γ, $((c^2-b^2)/c,0)$; y luego el inverso de este punto respecto Γ_0.

Para determinar los inverso citados, se halla la polar respecto a la circunferencia y se interseca con $y=0$.

• El centro (X_{942} de ETC) de elipse envolvente de la polares de los puntos de la circunferencia circunscrita a un triángulo, respecto a su circunferencia inscrita, es el inverso del X_{36} de ETC respecto a la circunferencia inscrita.

X_{36} es el inverso del incentro respecto a la circunferencia circunscrita.

En coordenadas baricéntricas respecto a un triángulo $\widehat{ABC}$, un punto de las circunferencia circunscrita $a^2yz+b^2zx+c^2xy=0$ lo podemos poner en la forma $P(a^2/u:b^2/v:c^2/w)$, como conjugado del punto del infinito $(u:v:w)$.

La ecuación de la circunferencia inscrita es:

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy-\frac{1}{4}(x+y+z)\left((b+c-a)^2x+(c+a-b)^2y+(a+b-c)^2z\right)=0.$$

La polar de P, respecto a la circunferencia inscrita es la recta $Ux+Vy+Wz=0$:

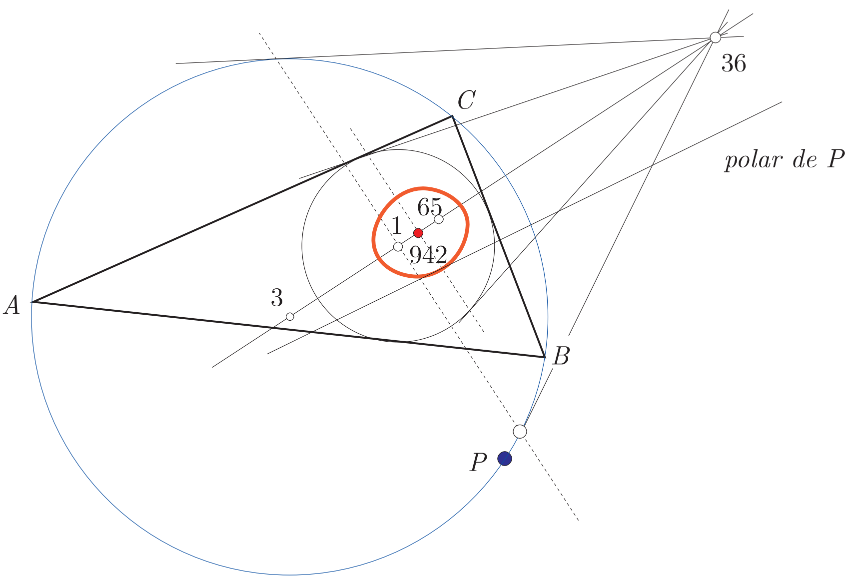
$$(b+c-a)\left(a^2(b+c-a)vw-au(b^2w+c^2v)+(b-c)u(b^2w-c^2v)\right)x+$$
$$(c+a-b)\left(b^2(c+a-b)wu-bv(c^2u+a^2w)+(c-a)v(c^2u-a^2w)\right)y+$$
$$(a+b-c)\left(c^2(a+b-c)uv-cw(a^2v+b^2u)+(a-b)w(a^2v-b^2u)\right)z=0.$$

Igualando los coeficientes de esta polar a U,V y W y eliminando u,v y w entre las tres ecuaciones que resultan y la $u+v+w=0$, se obtiene la ecuación tangencial de la cónica polar recíproca de la circunferencia circunscrita respecto a la inscrita:

$$a^2(c+a-b)(a+b-c)U^2+b^2(a+b-c)(b+c-a)V^2+c^2(b+c-a)(c+a-b)W^2$$
$$-(a+b-c)\left(a^3+b^3+c^3-a^2(b+c)-b^2(c+a)-c^2(a+b)\right)UV$$
$$-(b+c-a)\left(a^3+b^3+c^3-a^2(b+c)-b^2(c+a)-c^2(a+b)\right)VW$$
$$-(c+a-b)\left(a^3+b^3+c^3-a^2(b+c)-b^2(c+a)-c^2(a+b)\right)WU=0.$$

Si multiplicamos la matriz asociada a esta cónica tangencial por las coordenadas de la recta del infinito, $(1:1:1)$, nos da el centro de la cónica puntual[(1)], punto X_{942}:

$$\left(a\left(2abc+a^2(b+c)-(b-c)^2(b+c)\right):b\left(2abc+b^2(c+a)-(c-a)^2(c+a)\right):c\left(2abc+c^2(a+b)-(a-b)^2(a+b)\right)\right).$$



El otro foco de la elipse es el simétrico del incentro respecto a su centro; es el X_{65}:

$$\left(\frac{a(b+c)}{b+c-a}:\frac{b(c+a)}{c+a-b}:\frac{c(a+b)}{a+b-c}\right).$$

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejco1849.pdf

(1) Esta cónica es una elipse, pues la distancia del circuncentro al incentro es $\sqrt{R(R-2r)}<R$