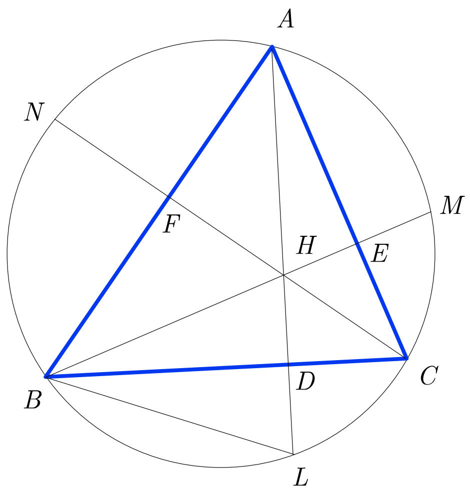
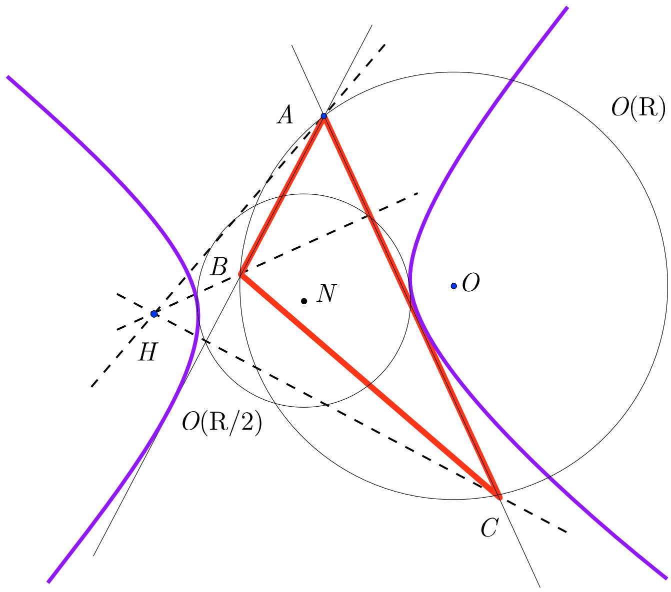
Construir un triángulo dados un vértice, el circuncentro y el ortocentro.

SOLUCIÓN:





Si se conocen las posiciones de un vértice A, el circuncentro O y el ortocentro H de un triángulo, se puede trazar la circunferencia circunscrita $O(R)$ de centro O y radio $R = OA$.

Haremos uso del siguiente hecho: *Si se prolonga la altura AH de $\widehat{ABC}$ hasta L en la circunferencia circunscrita, el lado BC es la mediatriz de HL.*

En efecto, si D, E y F son los pies de las alturas desde A, B y C (respectivamente), los ángulos $\widehat{CBL}$ y $\widehat{CAL}$, inscritos en Γ, son iguales al abarcar el mismo arco. También, los ángulos $\widehat{CAD}$ y $\widehat{CBE}$ son iguales, pues los lados de uno son perpendiculares a los del otro. Luego, BD es a la vez bisectriz y altura en el triángulo $\widehat{BHL}$; en consecuencia, D es el punto medio del segmento HL y BC es su mediatriz.

La misma propiedad la poseen las otras dos alturas de $\widehat{ABC}$.

Para construir el que tiene un vértice en A, circuncentro en O y ortocentro en H, puntos dados, se considera la circunferencia $O(R)$, de radio $R = OA$, y en ella el otro punto en que la recta AH la corta. La mediatriz del segmento de extremos este punto y H, es el lado opuesto al vértice A del triángulo buscado. Los vértices B y C son las intersecciones de esta mediatriz con $O(R)$.

La envolvente de los lados de los triángulo con un vértice en $O(R)$ y con ortocentro en H es una cónica con focos en H y O y circunferencia focal $O(R)$ y circunferencia principal $N(R/2)$, la circunferencia de los nueve puntos de cualquier triángulo inscrito en $O(R)$ con ortocentro en H (http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr1880.pdf).

Para que exista solución del problema planteado (con los datos A, O y H) el vértice A ha de ser exterior a esta cónica; es decir,

$$|AO - AH| < OA = R.$$

Si H está en $O(R)$, la solución es el triángulo $\widehat{ABC}$ rectángulo en $B = H$.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/trresolu.pdf
http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2087.pdf