

Sean  $\widehat{ABC}$  un triángulo no rectángulo en  $A$  y  $V$  un punto situado sobre la recta  $BC$ , distinto de los vértices. La paralela a  $AC$  y  $AB$  por  $V$  cortan a  $AB$  y  $AC$  en  $D$  y  $E$ , respectivamente. La perpendicular a  $AB$  por  $V$  corta en  $G$  a  $AC$ . La perpendicular a  $AC$  por  $V$  corta en  $F$  a  $AB$ . Además consideramos los puntos de intersección  $J = GD \cap VF$  y  $K = EF \cap VG$ .

a) Demostrar que cada uno de los siguientes enunciados es cierto si y sólo si  $AV$  es una de las bisectrices del ángulo  $A$ .

$DE$  es paralela a  $FG$ .

$FG$  es paralela a  $JK$ .

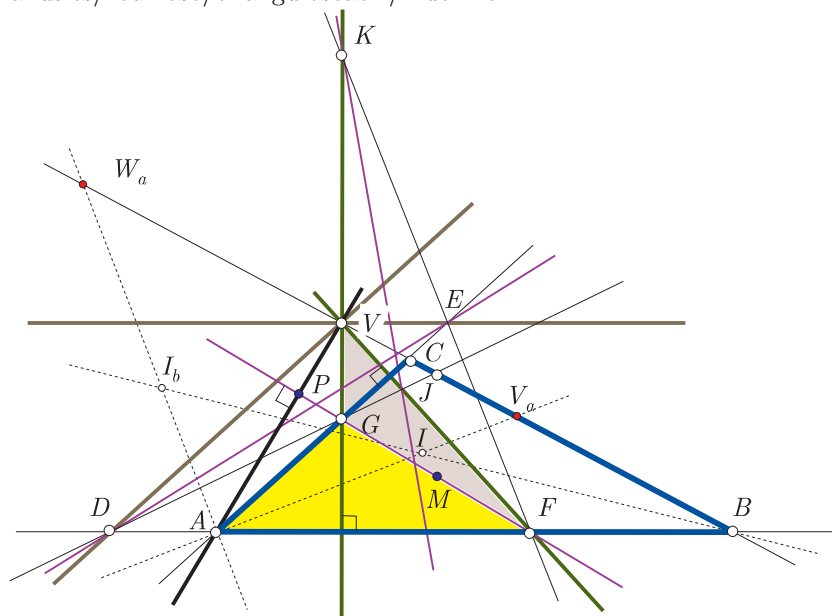
$DG$ ,  $EF$  y  $AV$  son concurrentes.

El triángulo  $\widehat{VFG}$  es isósceles.

b)  $V$  es el ortocentro de  $\widehat{AFG}$ .

### SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **398**.  
<http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm>



Lo resolveremos utilizando coordenadas baricéntricas<sup>(1)</sup> relativas al triángulo dado  $\widehat{ABC}$ , respecto a las cuales, los vértices son:

$$A(1, 0, 0), \quad B(0, 1, 0), \quad C(0, 0, 1);$$

las ecuaciones de los lados y de la recta del infinito son<sup>(2)</sup>:

$$BC : x = 0, \quad CA : y = 0, \quad AB : z = 0, \quad \ell_\infty : x + y + z = 0.$$

El incentro  $I$  y los exincentros<sup>(3)</sup>  $I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$ :

$$I(a, b, c), \quad I_a(-a, b, c), \quad I_b(a, -b, c), \quad I_c(a, b, -c),$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son las longitudes de los lados opuestos a los vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$ , respectivamente.

Las ecuaciones de las bisectrices, interna y externa, por el vértice  $A$  son:

$$AI : cy - bz = 0, \quad AI_b : cy + bz = 0,$$

y los puntos de intersección de éstas con el lado  $BC$ :

$$V_a(0, b, c), \quad W_a(0, -b, c).$$

<sup>(1)</sup> Una buena referencia para el uso de coordenadas baricéntricas, en problemas relativos a triángulos, es: Paul Yiu.- Introduction to Geometry of the Triangle. <http://www.math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.ps>

Nos referimos a esta obra, por ejemplo, con la cita: Paul Yiu, pág. ### (para un hecho contenido en tal página).

<sup>(2)</sup> Paul Yiu, pág. 46

<sup>(3)</sup> Paul Yiu, pág. 26

Si una recta  $\ell$  tiene punto del infinito  $(f, g, h)$ , las coordenadas del punto del infinito de una recta perpendicular a  $\ell$  son<sup>(4)</sup>:

$$(gS_B - hS_C, hS_C - fS_A, fS_A - gS_B),$$

donde

$$S_A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \quad S_B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, \quad S_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}, \quad (\text{notación de Conway})$$

con lo que  $S_B + S_C = a^2$ ,  $S_C + S_A = b^2$  y  $S_A + S_B = c^2$ .

Sea  $V(0, 1, t)$  un punto en el lado  $BC$ , distinto de  $B$  y  $C$ . La recta paralela por  $V$  al lado  $AB$  pasa por el punto del infinito  $(1, -1, 0)$  de éste, por lo que su ecuación es  $tx + ty - z = 0$ , y  $E(1, 0, t)$  es el punto de intersección de dicha paralela con el lado  $AC$ . Así mismo, el punto de intersección de la paralela a  $AC$  por  $V$  es  $D(t, 1, 0)$ .

Las perpendiculares a  $AB$  (con punto del infinito  $(1, -1, 0)$ ) y a  $AC$  (con punto del infinito  $(1, 0, -1)$ ) por  $V$  tienen por ecuaciones, respectivamente,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & t \\ -S_B & -S_A & S_A + S_B \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & t \\ S_C & -S_C - S_A & S_A \end{vmatrix} = 0.$$

El punto de intersección  $G$  de la primera con el lado  $AC$  y  $F$  de la segunda con el lado  $AB$  son

$$F(-tS_C, S_A + S_At + S_Ct, 0), \quad G(-S_B, 0, S_A + S_B + tS_A).$$

- a1) Para que las rectas  $DE$  y  $FG$  sean paralelas, sus puntos del infinito han de coincidir:

$$\lambda(1 - t, -1, t) = (S_B - S_Ct, S_A + S_At + S_Ct, -S_A - S_B - S_At).$$

Esto ocurre cuando

$$t = \pm \frac{\sqrt{S_A + S_B}}{\sqrt{S_A + S_C}} = \pm \frac{c}{b}, \quad \lambda = \frac{a^2 - (b \pm c)^2}{2},$$

o sea, cuando  $V(0, 1, t)$  coincide con  $V_a(0, b, c)$  o  $W_a(0, -b, c)$ , es decir, cuando  $AV$  es una de las bisectrices en  $A$ . Con lo que queda probada la primera equivalencia del apartado a).

- a2) La intersección de las rectas  $DG$  y  $VF$  da el punto  $J$ :

$$DG : (S_A + S_B + S_At)x - (S_A + S_B + S_At)ty + S_Bz = 0, \quad VF : (S_At + S_At^2 + S_Ct^2)x + S_Ct^2y - S_Ctz = 0,$$

$$J(S_AS_Ct, S_BS_C + S_A(S_B + S_C), (S_A + S_C)(S_A + S_B + S_At)t).$$

La intersección de las rectas  $EF$  y  $VG$  nos da el punto  $K$ :

$$EF : (S_At + S_At^2 + S_Ct^2)x + S_Ct^2y - (S_A + S_At + S_Ct)z = 0, \quad VG : (S_A + S_B + S_At)x - S_Bty + S_Bz = 0,$$

$$K(S_AS_Bt, (S_A + S_B)(S_A + S_At + S_Ct), (S_AS_B + S_AS_C + S_BS_C)t^2).$$

Para que las rectas  $FG$  y  $JK$  sean paralelas es necesario y suficiente que tengan el mismo punto el infinito.

Como las coordenadas del punto del infinito de la recta  $JK$  se obtiene multiplicando la suma de las coordenadas de  $K$  por las coordenadas de  $J$  y restándole las coordenadas de  $K$  multiplicadas por la suma de las coordenadas de  $J$ , debemos resolver las ecuaciones:

$$-(S_At(1+t)(S_A^2(-S_C + S_Bt) + S_BS_C(S_B - S_Ct) + S_A(S_B^2 - S_C^2t))) = \lambda(S_B - S_Ct)$$

$$-(S_At(1+t)(S_BS_C^2t + S_A^3(1+t) + S_AS_C(S_Ct + 2S_B(1+t)) + S_A^2(2S_C(1+t) + S_B(2+t)))) = \lambda(S_A + S_At + S_Ct)$$

$$S_At(1+t)(S_B^2S_C + S_A^3(1+t) + S_A^2(S_C + 2S_Ct + 2S_B(1+t)) + S_AS_B(S_B + 2S_C(1+t))) = \lambda(-S_A - S_B - S_At).$$

Con lo que de nuevo se obtiene que  $FG$  y  $JK$  son paralelas si y sólo si  $t = \pm c/b$ , es decir, si y sólo si  $AV$  es una de las bisectrices en  $A$ .

Queda así establecida el segundo enunciado del apartado a).

- a3) Para establecer el tercer acerto del apartado a), consideramos las ecuaciones de las rectas:

$$AV : ty - z = 0, \quad DG : (S_A + S_B + S_At)x - (S_A + S_B + S_At)ty + S_Bz = 0,$$

<sup>(4)</sup>Paul Yiu, pág. 55

$$EF : -(S_A + S_{At} + S_{Ct})tx - S_{Ct}^2y + (S_A + S_{At} + S_{Ct})z = 0.$$

Para que sean concurrentes ha de ser cero el determinante formado por los coeficientes de las tres:

$$\begin{vmatrix} 0 & t & -1 \\ (S_A + S_B + S_{At}) & -(S_A + S_B + S_{At})t & S_B \\ -(S_A + S_{At} + S_{Ct})t & -S_{Ct}^2 & (S_A + S_{At} + S_{Ct}) \end{vmatrix} = 0, \quad t = \pm \frac{\sqrt{S_A + S_B}}{\sqrt{S_A + S_C}} = \pm \frac{c}{b}.$$

De nuevo  $V$  ha de coincidir con  $V_a$  o con  $W_a$ .

• a4) Probemos ahora que el triángulo  $\widehat{VFG}$  es isósceles sólo cuando  $AV$  es una de las bisectrices en  $A$  (último estamento del apartado a).

En primer lugar, demostremos que  $AV$  siempre es perpendicular a  $FG$ , cuando  $V$  varía en el lado  $BC$  de  $\widehat{ABC}$ . Para ello, recordemos la siguiente caracterización<sup>(5)</sup> de rectas perpendiculares, en coordenadas baricéntricas:

”Dos rectas con puntos del infinito  $(f, g, h)$  y  $(f', g', h')$  son perpendiculares si y sólo si

$$S_A f f' + S_B g g' + S_C h h' = 0.”$$

En nuestro caso, el punto del infinito de la recta  $FG$  es  $(S_B - S_{Ct}, S_A + S_{At} + S_{Ct}, -S_A - S_B - S_{At})$  y el de la recta  $AV$  es  $(1 + t, -1, -t)$ , luego,  $AV$  y  $FG$  son perpendiculares, pues:

$$S_A(1 + t)(S_B - S_{Ct}) + S_B(-1)(S_A + S_{At} + S_{Ct}) + S_C(-t)(-S_A - S_B - S_{At}) = 0.$$

Como consecuencia,  $AV$  y  $GV$  son dos alturas del triángulo  $\widehat{AFG}$ ; es decir,  $V$  es su ortocentro. Queda así establecido el apartado b).

Para que  $\widehat{VFG}$  sea isósceles, la perpendicular por  $V$  a su base  $FG$ , que es  $AV$ , ha de pasar por el punto medio  $M$  de  $FG$ . El punto medio de  $FG$  es  $M(-S_B - S_{Ct}, S_A + S_{At} + S_{Ct}, S_A + S_B + S_{At})$ , e imponiendo que esté en la recta  $AV : ty - z = 0$  se tiene que

$$t = \pm \frac{c}{b}.$$

Con lo que el problema queda resuelto. Si el ángulo en  $A$  es recto o  $V$  coincide con uno de los vértices  $B$  o  $C$ , las paralelas y las perpendiculares a los catetos por  $V$  coinciden dos a dos, y no tiene sentido el planteamiento del mismo.

#### Observaciones adicionales.-

— Para demostrar la afirmación cuarta del apartado a):

”El triángulo  $\widehat{VFG}$  es isósceles si y sólo si  $AV$  es una de las bisectrices del ángulo  $A$ ”, debemos demostrar que el punto medio

$$M(-S_B - S_{Ct}, S_A + S_{At} + S_{Ct}, S_A + S_B + S_{At})$$

de  $FG$  ha de coincidir con el punto de intersección  $P$  de las rectas  $AV$  y  $FG$ .

Cuando  $V$  varía sobre el lado  $BC$  el punto  $M$  describe una recta y  $P$  una cúbica de ecuaciones paramétricas respectivas:

$$\begin{array}{ll} x = -S_B - S_{Ct} & x = -(S_B S_C + S_A(S_B + S_C))t(1 + t) \\ y = S_A + S_{At} + S_{Ct} & y = (S_A + S_B + S_{At})(S_A + S_{At} + S_{Ct}) \\ z = S_A + S_B + S_{At} & z = t(S_A + S_B + S_{At})(S_A + S_{At} + S_{Ct}) \end{array}$$

Para determinar los puntos comunes a estas curvas, debemos encontrar los valores de  $t$  para que sus coordenadas coincidan,  $\{P\} = \lambda\{M\}$ , obteniéndose que

$$t = \pm \frac{c}{b}, \quad \lambda = \pm \frac{c(-a^2 \pm (b + c)^2)}{2b}.$$

lo que equivale a que el punto  $AV$  sea una de las bisectrices en  $A$ . Las rectas que unen el vértice  $A$  con los de intersección de recta y cúbica (obtenidas como lugares geométricos) cortan al lado  $BC$  en los puntos que satisfacen la condición impuesta.

<sup>(5)</sup>Paul Yiu. pág. 55



Se trata de un punto denominado "triangle center" en "The Encyclopedia of Triangle Centers (ETC)" de Clark Kimberling<sup>(6)</sup>, ya que la primera componente de sus coordenadas

$$f(a, b, c) = S_A^4 S_B^4 + S_A^4 S_C^4 - S_B^4 S_C^4 - 2S_A^2 S_B^2 S_C^4,$$

es una función homogénea de las longitudes de los lados de  $\widehat{ABC}$  y verifica que tal punto se expresa por

$$\left( f(a, b, c), \quad f(b, c, a), \quad f(c, a, b) \right).$$

Y además, se verifica que  $f(a, b, c) = f(a, c, b)$ .

Si evaluamos las coordenadas del centro de perspectividad de los triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{A'B'C'}$  en un triángulo de lados  $a = 6\text{cm}$ ,  $b = 9\text{cm}$  y  $c = 12\text{cm}$ , la distancia de dicho punto al lado menor  $BC$  es<sup>(7)</sup>

$$9.8010047378\text{cm}.$$

<http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2224.pdf>

---

<sup>(6)</sup><http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/index.html>

<sup>(7)</sup>No figura en la Enciclopedia ETC, pero es el conjugado isogonal del X(1498)