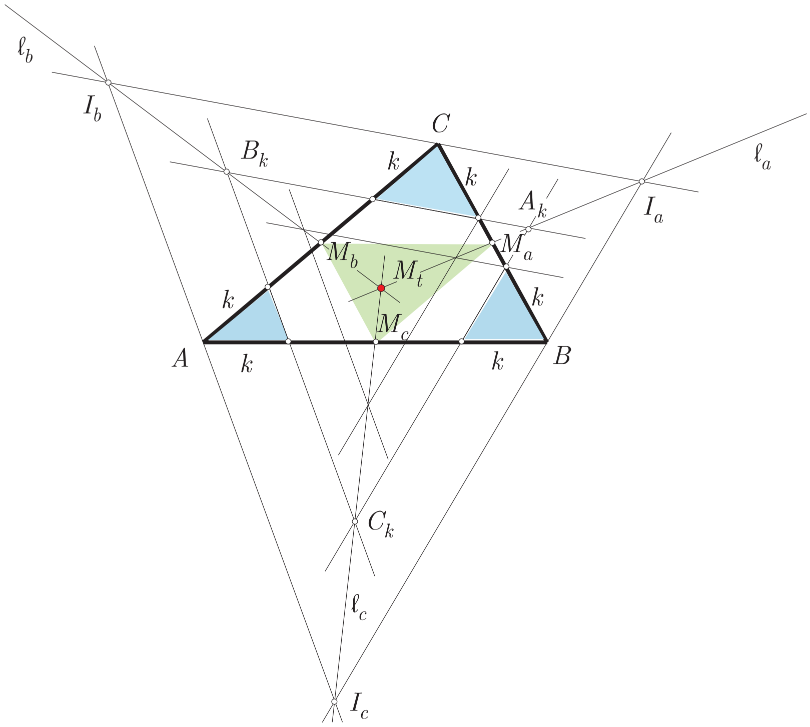
Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, consideremos los triángulos isósceles $\widehat{AB_aC_a}$, $\widehat{BA_bC_b}$, $\widehat{CB_cA_c}$, con $AB_a = AC_a = BC_b = BA_b = CA_c = CB_c$, B_a en la semirrecta AC, C_a en la semirrecta AB, C_b en la semirrecta BA, A_b en la semirrecta BC, A_c en la semirrecta CB y B_c en la semirrecta CA. Cuando las rectas B_aC_a, C_bA_b y A_cB_c concurren, lo hacen en el punto intermedio (Mittenpunkt, Middlespoint).

SOLUCIÓN:



Como las rectas por A_b^k y A_c^k y perpendiculares respectivamente a las bisectrices en B y C, cortan en C_b^k y B_c^k a AB y AC, respectivamente, se tiene que $\overline{BC_b^k} = \overline{CA_c^k} = k$. Luego, las bases de los triángulo isósceles $\widehat{BC_b^kA_b^k}$ y $\widehat{CA_c^kB_c^k}$ se cortan en el punto A_k de ℓ_a.

Así mismo, las correspondientes bases de los triángulos isósceles $\widehat{CA_c^kB_c^k}$ y $\widehat{AB_a^kC_a^k}$, se cortan en el punto B_k de ℓ_b. Y también, las correspondientes bases de los triángulos isósceles $\widehat{AB_a^kC_a^k}$ y $\widehat{BC_b^kA_b^k}$, se cortan en el puntos C_k de ℓ_c.

Como los triángulos $A_kB_kC_k$ tienen sus lados correspondientes paralelos, cuando k varía, ellos son perspectivos entre sí, y, por tanto, las rectas que unen sus vértices, ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c, son concurrentes.

Cuando las bases de los triángulo isósceles se corten en el punto de intersección de ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c se obtiene (ver más abajo) un valor para $k = 2R\Delta/(r(r+4R))$, donde r y R son los radios de las circunferencias inscritas y circunscritas, respectivamente a $\widehat{ABC}$ y Δ su área.

TRATAMIENTO ANALÍTICO:

Considerando un sistema de coordenadas baricéntricas homogéneas, se tiene:

$$A_b^k(0 : a-k : k), \quad A_c^k(0 : k : a-k), \quad B_c^k(k : 0 : b-k), \quad B_a^k(b-k : 0 : k), \quad C_a^k(c-k : k : 0), \quad C_b^k(k : 0 : c-k).$$

Las ecuaciones de las rectas $B_a^kC_a^k, C_b^kA_b^k$ y $A_c^kB_c^k$ son, respectivamente:

$$-kx + (c-k)y + (b-k)z = 0, \qquad (c-k)x - ky + (a-k)z = 0, \qquad (b-k)x + (a-k)y - kz = 0.$$

Para que estas rectas sean concurrentes, ha de ocurrir que el determinante formado por sus coeficientes sea nula; o sea, cuando

$$k = \frac{2abc}{2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2)} = \frac{2R\Delta}{r(r+4R)},$$

donde r y R son los radios de las circunferencias inscritas y circunscritas, respectivamente a $\widehat{ABC}$ y Δ su área.

Para este valor de k el punto de concurrencia de las rectas $B_a^kC_a^k, C_b^kA_b^k$ y $A_c^kB_c^k$ es el punto intermedio (X_9 en ETC):

$$\big(a(b+c-a) : b(c+a-b) : c(a+b-c)\big).$$

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2401.pdf