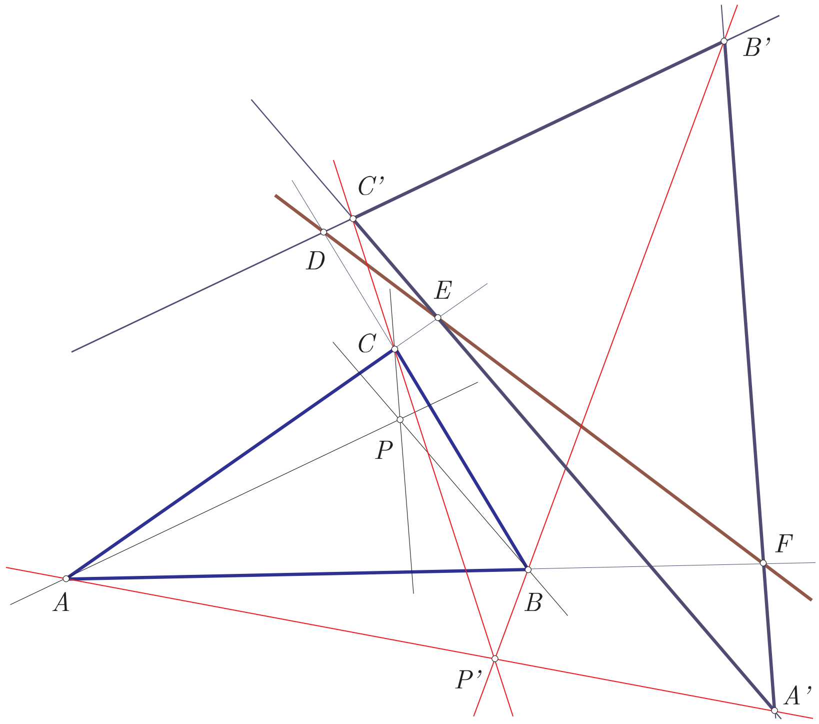
La tripolar de un punto P respecto a un triángulo $\widehat{ABC}$, corta a sus lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F; las rectas paralelas a las cevianas AP, BP y CP por D, E y F, forman un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$.

SOLUCIÓN:



El triángulo $\widehat{A'B'C'}$ determinado por las rectas paralelas a AP, BP y CP del enunciado y el triángulo $\widehat{ABC}$ verifican que la intersección de lados $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ y $CA \cap C'A'$ se cortan en una recta (la tripolar de P), luego, por el teorema de Desargues, las rectas AA', BB', CC' son concurrentes.

Vamos a demostrar que las rectas AA', BB', CC' son concurrentes son concurrentes de forma directa y determinar las coordenadas del punto de concurrencia.

Sean $P(u : v : w)$ las coordenadas baricéntricas del punto P, respecto al triángulo $\widehat{ABC}$. (1) Las coordenadas del punto D, intersección de BC con la recta que une los pies de las cevianas de P por los vértices B y C son $D(0 : -v : w)$. La ecuación de la recta pasando por D y que tiene el mismo punto del infinito que la recta AP es:

$$\ell_a : \ 2vwx + w(v+w)y + v(v+w)z = 0.$$

Permutando cíclicamente, se obtienen las ecuaciones de las rectas por E y F paralelas a BP y CP:

$$\ell_b : \ w(w+u)x + 2wuy + u(w+u)z = 0, \qquad \ell_c : \ v(u+v)x + u(u+v)y + 2uvz = 0.$$

Las rectas ℓ_b y ℓ_c se cortan en el punto:

$$A' \left(-u(u^2 - 3vw + uw + uv)) : v(u+w)(u+v-2w) : w(u+v)(u-2v+w)\right) =$$

$$A' \left(* * * : \frac{v(u+w)}{u+w-2v} : \frac{w(u+v)}{u+v-2w}\right).$$

Los puntos de intersección $\ell_c \cap \ell_a$ y $\ell_a \cap \ell_b$ son:

$$B' \left(\frac{u(v+w)}{v+w-2u} : * * * : \frac{w(u+v)}{u+v-2w}\right),$$

$$C' \left(\frac{u(v+w)}{v+w-2u} : \frac{v(u+w)}{u+w-2v} : * * *\right).$$

(1) Podríamos tomar otro sistema de referencia proyectivo, por ejemplo $\{A, B, C; P\}$, pero tomamos $\{A, B, C; G\}$ para obtener las coordenadas de ciertos puntos notables del triángulo, que son centros de perspectividad de los triángulo en cuestión.

Por lo que el centro de perspectividad de los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ es:

$$P'\left(\frac{u(v+w)}{v+w-2u}:\frac{v(u+w)}{u+w-2v}:\frac{w(u+v)}{u+v-2w}\right).$$

COMPLEMENTO:

• La recta ℓ_a, paralela a la ceviana AP, goza de la siguiente propiedad geométrica:

Sea L un punto arbitrario sobre la recta AP y los puntos $L_b = LP_b \cap CP$ y $L_c = LP_c \cap BP$, entonces los puntos medios de L_bL_c describen una cónica $\mathcal{C}_a$, cuando L varía, que pasa por P'_a y cuya tangente en éste es ℓ_a.

La cónica $\mathcal{C}_a$ pasa por el punto medio de BC (cuando $L = A$), por P (cuando $L = P$) y es tangente en este punto a AP. Es decir, es la cónica bitangente a AP ya a ℓ_a en P y P'_a (respectivamente) y que contiene al punto medio de BC. Por los que es una cónica de la familia:

$$(-wy+vz)(-2vwx-w(v+w)y-v(v+w)z)+\lambda(2vwx-uwy-uvz)^2=0,$$

que pasa por $(0,1,1)$, por lo que $\lambda=(v-w)/u^2$ y su ecuación es:

$$\mathcal{C}_a:\ 2v(v-w)wx^2+u^2wy^2-u^2vz^2+u^2(v-w)yz-uv(u+2v-2w)zx+uw(u-2v+2w)xy=0.$$

El centro de esta cónica (hipérbola) es el punto medio de PD:

$$(u(v-w):v(u+2v):-w(u+2w)).$$

Si se procede cíclicamente sobre los lados del triángulo $\widehat{ABC}$ tenemos otras dos cónicas, $\mathcal{C}_b$ y $\mathcal{C}_c$, poseyendo las similares propiedades, y cuyas ecuaciones se deducen de las de $\mathcal{C}_a$ permutando cíclicamente las variables x, y, z, u, v, w. Se tiene que los centros de las tres cónicas están alineados en la recta (homotética de la tripolar de P, mediante la homotecia de centro P y razón $1/2$):

$$\frac{-u+2v+2w}{u}x+\frac{2u-v+2w}{v}y+\frac{2u+2v-w}{w}z=0.$$

• Algunas situaciones particulares de pares (P, P') son las siguientes, para centros del triángulo de la Enciclopedia de Kimberling:

$$(X_1,X_{4674}),\quad (X_4,X_{74}),\quad (X_7,X_{1156}),\quad (X_8,X_{1320}),\quad (X_{69},X_{895}),\quad (X_{4240},X_{9033}),$$

$$(X_{5466},X_{690}),\quad (X_{5468},X_{690}),\quad (X_{5855},X_{891}),\quad (X_{6548},X_{900}).$$

Si Q es el tripolo [2] de la recta que contiene los centros de las cónicas $\mathcal{C}_a$, $\mathcal{C}_b$ y $\mathcal{C}_c$, tenemos estos pares (P, Q) notables:

$$(X_1,X_{89}),\quad (X_6,X_{1383}).$$

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2458.pdf

[2] El tripolo de la recta homotética de la tripolar de un punto $P(u:v:w)$, mediante una homotecia de centro en P y razón ρ, es el punto de coordenadas:

$$\left(\frac{(3\rho-2)u+v+w}{u}:\frac{u+(3\rho-2)v+w}{v}:\frac{u+v+(3\rho-2)w}{w}\right).$$