

# Geometría métrica y proyectiva en el plano con coordenadas baricéntricas. Algunos tópicos

Angel Montesdeoca

Versión 2.181231712

## 1 Introducción

Comenzamos, después de adoptar unas notaciones y recordar algunas propiedades relativas a triángulos, dando el concepto de coordenadas baricéntricas en el plano, a fin de utilizarlas para hacer un estudio analítico de la geometría del triángulo, que nos permitirá obtener demostraciones (no necesariamente las más directas o sencillas) de algunas de las numerosas y ricas propiedades de las que goza esta simple figura geométrica. Con este tratamiento se logra obtener resultados, sin necesidad de conocer de antemano ciertas propiedades del triángulo, salvo acaso algunas, tales como que la suma de sus ángulo es dos rectos, que el área es la mitad del producto de un lado por la altura correspondiente, los teoremas del seno y coseno, etc... Este procedimiento puede ser, en ciertos casos, engorroso y tal vez geoméricamente prosaico, carente de la elegancia e ingenio propios de la geometría sintética; pero, por el contrario (sin entrar en la controversia entre geometría analítica o sintética: ambas son igualmente válidas), goza de la ventaja de saber cómo empezar y proceder en la resolución de unos problemas determinados.

Dado que a lo largo de esta exposición se van intercalando ejemplos relativos a los conceptos introducidos, es necesario indicar que existen ciertos párrafos prioritarios para el estudio de la geometría plana en coordenadas baricéntricas hecho aquí. Entre ellos cabe reseñar los siguientes:

- § [3.1 Definición de coordenadas baricéntricas](#) (pág. 3)
- § [5 Dividir un segmento. Ecuación de la recta](#) (pág. 7)
- § [6.1 Medianas, bisectrices y alturas](#) (pág. 9)
- § [11.1 Producto escalar. Distancia entre puntos](#) (pág. 28), § [11.3](#) (pág. 29)
- § [12.1 Perpendicularidad](#) (pág. 30), § [12.2](#) (pág. 31), § [12.4](#) (pág. 33)
- § [13.1 Giro de rectas](#) (pág. 47) § [13.3](#) (pág. 49)
- § [19.1 Ecuación de la circunferencia. Centro y radio](#) (pág. 107), § [19.2](#) (pág. 108).

Aprovechando que un sistema de coordenadas baricéntricas es un caso particular de referencia proyectiva (§8), utilizamos las herramientas de geometría proyectiva para enfocar ciertos problemas, fundamentalmente en el estudio de cónicas. La expresión del producto escalar (11.35), en términos de coordenadas baricéntricas, nos permitirá afrontar problemas de perpendicularidad, de giro de rectas y de circunferencias.

Las coordenadas baricéntricas fueron introducidas por A.F. Möbius [14] en 1827, como una respuesta a la cuestión sobre qué masas se deben colocar en los vértices de un triángulo para que un punto dado sea el centro de gravedad de estas masas y han sido una herramienta muy utilizada en el siglo XIX y comienzos del XX para obtener resultados sobre geometría del triángulo, y en la actualidad los lectores de la revista Forum Geometricorum<sup>(1)</sup> y de Crux Mathematicorum o los miembros del grupo Hyacinthos<sup>(2)</sup> conocen y emplean con asiduidad en sus investigaciones sobre puntos notables del triángulo.

## 2 Notaciones y algunas fórmulas

**2.1** Dado en el plano un triángulo  $\widehat{ABC}$ , se designa, como es habitual, por  $a, b$  y  $c$  las longitudes de los lados opuestos a los vértices  $A, B$  y  $C$ , respectivamente; por las mismas letras  $A, B$  y  $C$ , se denotan los ángulos en los vértices correspondientes; por  $s = (a + b + c)/2$  el semiperímetro; por  $S$  el doble del área  $\Delta$ ; y, usando la notación (Conway),

$$S_\theta = S \cotag \theta, \quad (2.1)$$

se tiene, en particular, que

$$S_A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \quad S_B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, \quad S_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}, \quad (2.2)$$

pues, por el teorema del coseno, y usando  $S = bc \sen A = ca \sen B = ab \sen C$ ,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \sen A \cotag A = b^2 + c^2 - 2S \cotag A.$$

Algunas relaciones, como las siguientes, son útiles para simplificar fórmulas:

$$a^2 = S_B + S_C, \quad b^2 = S_C + S_A, \quad c^2 = S_A + S_B, \quad S^2 = S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A. \quad (2.3)$$

Las tres primeras son inmediatas y para la última, se usa que  $\sen(A + B + C) = \sen 180^\circ = 0$ . Desarrollando  $\sen(A + B + C)$  y dividiendo por  $\sen A \sen B \sen C$ , se obtiene que

$$\cotag A \cotag B + \cotag B \cotag C + \cotag C \cotag A - 1 = 0,$$

de donde se deduce la última fórmula.

**2.2** Ahora, combinando las fórmulas (2.3), se llega, sin dificultad, a estas otras relaciones:

$$\left. \begin{aligned} S_A &= bc \cos A, & S_B &= ca \cos B, & S_C &= ab \cos C. \\ a^2 b^2 &= S^2 + S_C^2, & b^2 c^2 &= S^2 + S_A^2, & c^2 a^2 &= S^2 + S_B^2. \\ S_A - S_B &= (b + a)(b - a), & S_B - S_C &= (c + b)(c - b), & S_C - S_A &= (a + c)(a - c). \\ S_{A/2} &= S_A + bc = 2s(s - a), & S_{B/2} &= S_B + ca = 2s(s - b), & S_{C/2} &= S_C + ab = 2s(s - c). \\ S_{A/4} &= S_{A/2} + \sqrt{2bcS_{A/2}} = S_A + bc + \sqrt{2bcs(S_A + bc)}, & S_{B/4} &= \dots, & S_{C/4} &= \dots \\ ab - S_C &= 2(s - a)(s - b), & bc - S_A &= 2(s - b)(s - c), & ca - S_B &= 2(s - c)(s - a). \\ cS_C - aS_A &= 2s(b - s)(c - a), & aS_A - bS_B &= 2s(c - s)(a - b), & bS_B - cS_C &= 2s(a - s)(b - c). \\ S^2 &= a^2 S_A + S_B S_C = b^2 S_B + S_C S_A = c^2 S_C + S_A S_B. \\ S \sen(\theta + \varphi) &= (S_\theta + S_\varphi) \sen \theta \sen \varphi, & S^2 \cos(\theta + \varphi) &= (S_\theta S_\varphi - S^2) \sen \theta \sen \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

(1) <http://forumgeom.fau.edu/index.html>

(2) <http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/>

Otras identidades de interés, que nos permiten expresar los resultados obtenidos en función de otras magnitudes relacionadas con  $\widehat{ABC}$ , son:

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad R = \frac{abc}{2S}, \quad r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}, \quad r_a = \frac{S}{b+c-a}, \quad (2.5)$$

$$\frac{S}{2} = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}, \quad (2.6)$$

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}, \quad (2.7)$$

$$ab + bc + ca = r^2 + s^2 + 4Rr, \quad \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a+b+c} = r^2 + s^2 - 2Rr, \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = s^2 - r^2 - 4Rr = S_\omega = S \cotag \omega, \quad a^3 + b^3 + c^3 = 2s(s^2 - 6rR - 3r^3), \\ a^4 + b^4 + c^4 = 2S^2(-2 + \operatorname{cosec}^2 \omega), \quad a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = S^2 \operatorname{cosec}^2 \omega. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Donde  $R, r, r_a, r_b, r_c$  son, respectivamente, los radios de las circunferencias circunscrita, inscrita y exinscritas, y  $\omega$  es el ángulo de Brocard (14.61). La primera de (2.5) es el teorema del seno y la (2.6) es la fórmula de Heron. Algunas de estas expresiones son fáciles de obtener; sin embargo, para deducir otras se necesita cierta destreza para manipular otras ya obtenidas; a lo largo de esta exposición se obtienen algunas de ellas, mediante cálculos analíticos. Por ejemplo, la primera de las (2.8), surge de:

$$r^2s = (s-a)(s-b)(s-c) = s^3 - (a+b+c)s^2 + (ab+bc+ca)s - abc = s^3 - 2s^3 + (ab+bc+ca)s - 4Rrs, \\ ab + bc + ca = r^2 + s^2 + 4Rr.$$

### 3 Definición de coordenadas baricéntricas

**3.1** Tomando un punto como origen, para todo punto  $P$  del plano del triángulo  $\widehat{ABC}$ , se denota por  $\vec{p}$  el vector con extremo en este punto y, para dos puntos  $P$  y  $Q$ , se tiene que  $\vec{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$ . Como  $\{A; \vec{AB}, \vec{AC}\}$  forman una referencia afín, existen unos únicos escalares  $y, z \in \mathbb{R}$ , tal que

$$\vec{AP} = y \vec{AB} + z \vec{AC} \quad \text{ó} \quad \vec{p} - \vec{a} = y(\vec{b} - \vec{a}) + z(\vec{c} - \vec{a}).$$

Poniendo  $x = 1 - y - z$ , se tiene

$$\vec{p} = x \vec{a} + y \vec{b} + z \vec{c}, \quad x + y + z = 1. \quad (3.10)$$

Los escalares  $x, y, z$ , así obtenidos, están unívocamente determinados por el punto  $P$  y el triángulo  $\widehat{ABC}$ . Se dice que  $x, y, z$  son las coordenadas baricéntricas (absolutas) de  $P$ , respecto a  $\widehat{ABC}$  y se pone  $P(x, y, z)$ . Obviamente, las coordenadas de los vértices son  $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0)$  y  $C(0, 0, 1)$ . Y se suele poner:

$$P = xA + yB + zC.$$

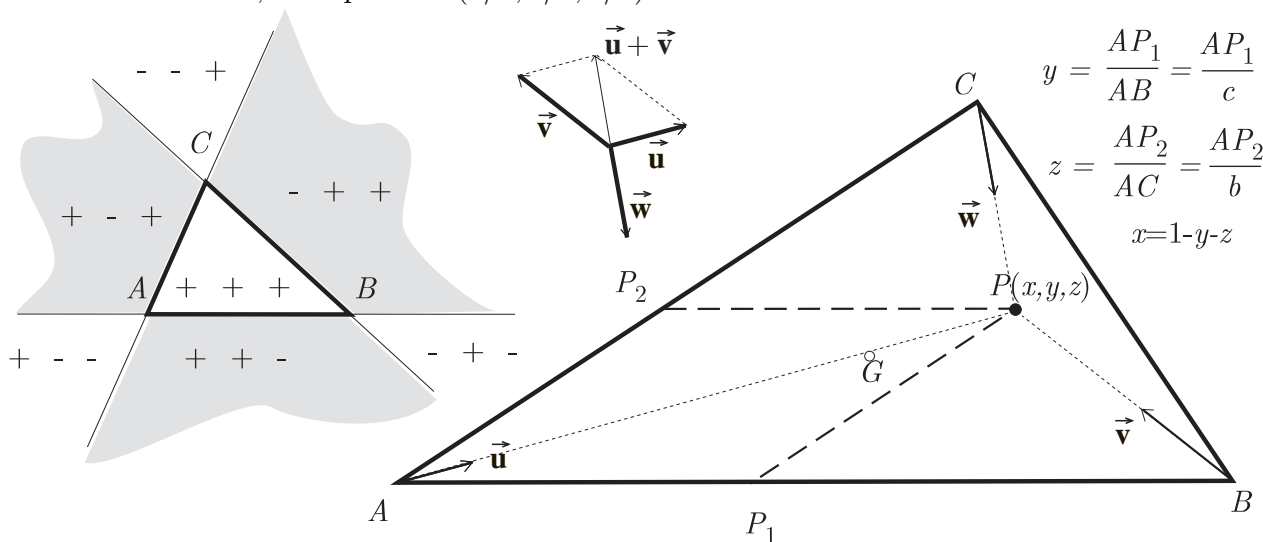
Diremos que  $\widehat{ABC}$  es el triángulo de referencia para las coordenadas baricéntricas.

De la expresión del vector posición  $\vec{p}$  de un punto  $P$ , respecto a la referencia afín  $\{A; \vec{AB}, \vec{AC}\}$ ,  $\vec{AP} = y \vec{AB} + z \vec{AC}$ , se sigue que  $\vec{AB} + \vec{BP} = y \vec{AB} + z(\vec{AB} + \vec{BC})$ ; es decir  $\vec{BP} = z \vec{BC} + x \vec{BA}$  es la expresión de  $\vec{p}$  respecto a la referencia afín  $\{B; \vec{BC}, \vec{BA}\}$ . De igual forma se obtiene que  $\vec{CP} = x \vec{CA} + y \vec{CB}$  es la expresión de  $\vec{p}$  respecto a la referencia afín  $\{C; \vec{CA}, \vec{CB}\}$ .

Cualquier terna  $u, v, w$  proporcional a las coordenadas baricéntricas absolutas  $x, y, z$  de un punto  $P$ , se dice que son las coordenadas baricéntricas homogéneas de  $P$ , con respecto al triángulo  $\widehat{ABC}$ , y se escribe  $P(u : v : w)$ . Cuando aparezca la igualdad  $(x : y : z) = (x' : y' : z')$  se entiende que estas ternas son iguales, salvo una constante de proporcionalidad.

De hecho  $P(x : y : z)$  es el baricentro de los puntos  $A, B, C$  afectados de las masas  $x, y, z$ , respectivamente. Para localizar la posición del punto  $P(m_1 : m_2 : m_3)$  de equilibrio entre los vértices  $A, B$  y  $C$  afectados de las respectivas masas  $m_1, m_2$  y  $m_3$ , se localiza <sup>(1)</sup> el punto  $P_a$  de equilibrio entre los vértices  $B$  y  $C$  con masas  $m_2$  y  $m_3$ , que deberá verificar <sup>(2)</sup>  $BP_a/P_aC = m_3/m_2$ . Ahora, nos queda localizar el punto de equilibrio  $P$  entre  $A$  y  $P_a$  con masas  $m_1$  y  $m_2 + m_3$ ; es decir,  $AP/PP_a = (m_2 + m_3)/m_1$ . O sea, se trata de construir el punto  $P_a$  que divide a  $BC$  en la razón  $m_3/m_2$  y, luego, el punto  $P$  que divide  $AP_a$  en la razón  $(m_2 + m_3)/m_1$ . El punto  $P$  es tal que  $\vec{AP} = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \vec{AB} + \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \vec{AC}$ .

En particular, el baricentro del triángulo, punto de equilibrio cuando los vértices están afectados de las mismas masas, es el punto  $G(1/3, 1/3, 1/3)$ .



Recíprocamente, si se quiere encontrar las coordenadas baricéntricas <sup>(3)</sup> de un punto  $P$ , se determinan sus coordenadas afines  $(y, z)$ , respecto a la referencia  $\{A; \vec{AB}, \vec{AC}\}$ , es decir,  $y = AP_1/AB$  y  $z = AP_2/AC$ , siendo  $P_1$  y  $P_2$  las proyecciones sobre  $AB$  y  $AC$ , paralelas a  $AC$  y  $AB$ , respectivamente; el signo de  $AP_1$  y  $AP_2$  dependen de su orientación respecto a los vectores  $\vec{AB}$  y

(1) No siempre posible con regla y compás.

(2) En cualquier máquina simple se cumple la ley de la palanca, que dice: "El producto de la potencia por su brazo es igual al de la resistencia por el suyo".

(3) En el applet CabriJava, disponible en <http://webpages.ull.es/users/amontes/cabri/geoba02.htm>, se visualizan las coordenadas de un punto del plano del triángulo  $\widehat{ABC}$ . En la pág. 20 se proporciona otro applet que determina las coordenadas de un punto y ubica un punto con coordenadas dadas.

$\overrightarrow{AC}$ . Si se pone  $x = 1 - y - z$ ,  $(x, y, z)$  son las coordenadas baricéntricas de  $P$ . Poniendo  $\overrightarrow{\mathbf{u}} = x \overrightarrow{AP}$ ,  $\overrightarrow{\mathbf{v}} = y \overrightarrow{BP}$  y  $\overrightarrow{\mathbf{w}} = z \overrightarrow{CP}$ , se tiene que  $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} + \overrightarrow{\mathbf{w}} = \vec{0}$ .

Las rectas que contienen los lados del triángulo  $\widehat{ABC}$ , delimitan siete regiones el plano y los signos de las componentes de las coordenadas de un punto, en cada una de ellas, vienen indicados en el diagrama de la figura.

**3.2** Como ejemplo de la relación entre coordenadas afines y baricéntricas, vamos a determinar el punto de paralelas iguales; es decir, el punto  $P$  para el cual las tres paralelas, trazadas por él a los lados del triángulo de referencia, determinan sobre los lados, segmentos de igual longitud.

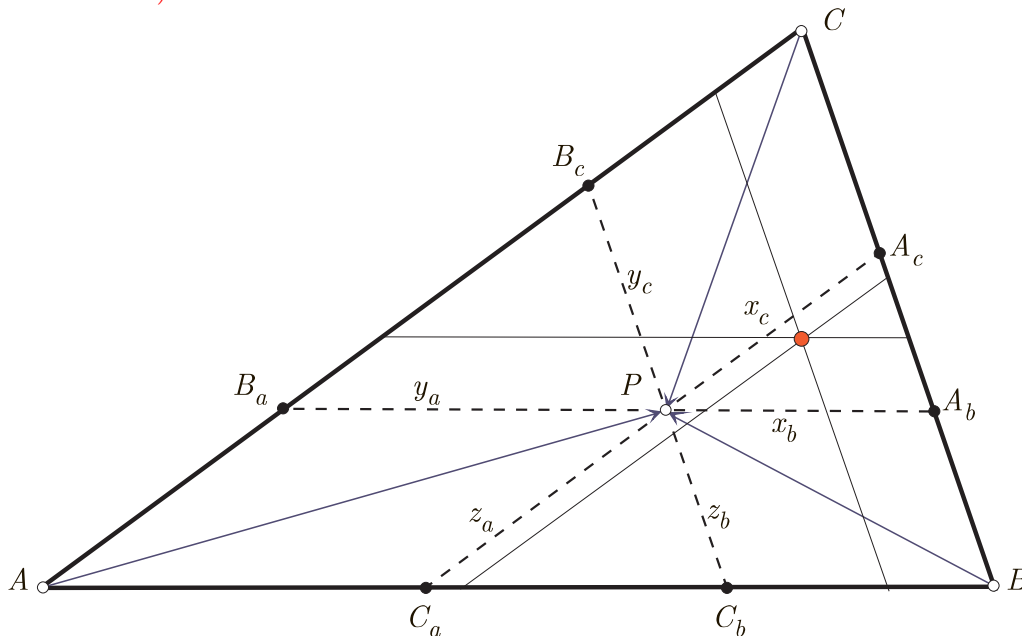
Sean  $(x, y, z)$  las coordenadas baricéntricas absolutas de un punto  $P$ ; esto quiere decir que

$$\overrightarrow{AP} = y \overrightarrow{AB} + z \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BP} = z \overrightarrow{BC} + x \overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{CP} = x \overrightarrow{CA} + y \overrightarrow{CB}.$$

Con lo que

$$\begin{aligned} PB_a &= y_a = cy, & PA_b &= x_b = cx, & B_a A_b &= y_a + x_b = c(y + x) = c(1 - z), \\ PC_b &= z_b = az, & PB_c &= y_c = ay, & C_b B_c &= z_b + y_c = a(z + y) = a(1 - x), \\ PA_c &= x_c = bx, & PC_a &= z_a = bz, & A_c C_a &= x_c + z_a = b(x + z) = b(1 - y). \end{aligned}$$

(Applet CabriJava)



Para que las longitudes de estos segmentos sean iguales se ha de satisfacer:

$$a(1 - x) = b(1 - y) = c(1 - z), \quad x + y + z = 1.$$

Resolviendo este sistema se llega a que las coordenadas baricéntricas absolutas y homogéneas del punto de paralelas iguales  $P_i$  son, respectivamente <sup>(1)</sup>

$$P_i \left( \frac{-bc + ca + ab}{bc + ca + ab}, \frac{bc - ca + ab}{bc + ca + ab}, \frac{bc + ca - ab}{bc + ca + ab} \right), \quad P_i \left( -\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} : \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} : \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right).$$

<sup>(1)</sup> El punto de paralelas iguales figura en ETC (ver §10) como el  $X_{192}$ . En la página 61 se relaciona este punto con los brocardianos del incentro.

Las longitudes de cada uno de estos segmentos de paralelas es

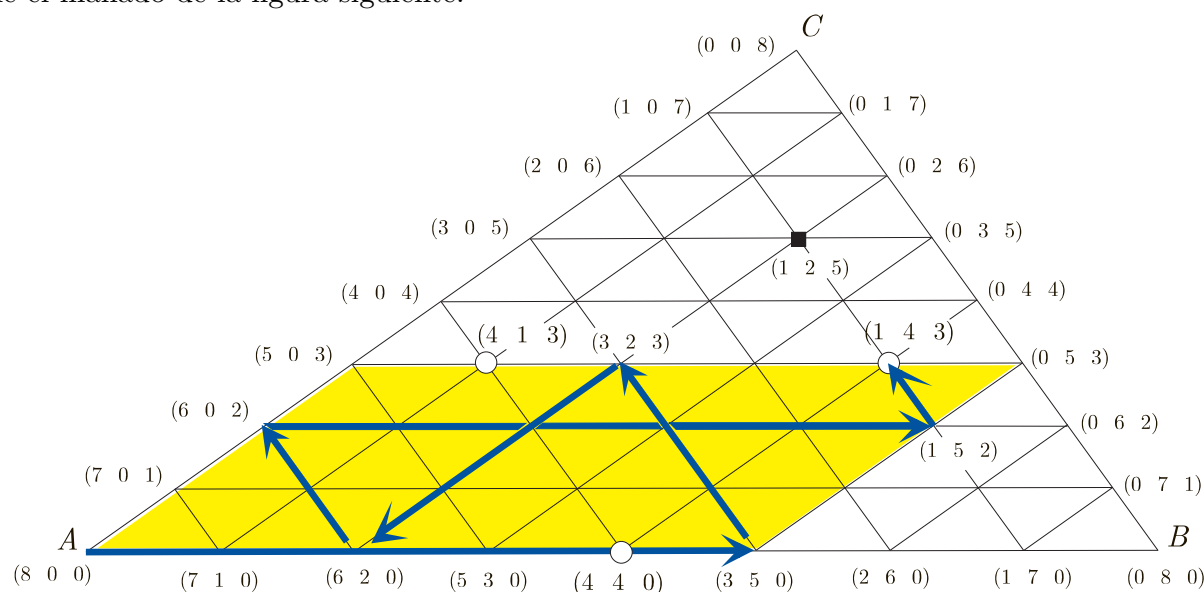
$$a \left( 1 - \frac{-bc + ca + ab}{bc + ca + ab} \right) = \frac{2abc}{bc + ca + ab} = 2 / \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

## 4 El problema de los tres vasos

Una curiosa aplicación <sup>(1)</sup> de las coordenadas baricéntricas es la resolución del problema de los tres vasos que en una de sus formas más sencillas se puede enunciar así:

Dados tres vasos  $A, B, C$  de capacidades 8, 5 y 3 litros, respectivamente, de los cuales el primero está lleno de agua y los otros dos vacíos. Se trata de dividir el agua en dos partes iguales vertiendo desde un vaso a los demás, sin utilizar ningún dispositivo de medición y sin, claro está, desperdiciar ni una gota.

Las ternas  $(x : y : z)$  formadas por números enteros no negativos cuya suma es constante  $d$ , pueden ser representadas por los nodos (en el interior de un triángulo  $ABC$ ) de la malla formada dividiendo cada lado en  $d$  partes iguales y trazando paralelas a los lados por cada uno de los puntos de división. Poniéndonos en el caso particular del problema propuesto, es decir,  $x + y + z = 8$ , se tiene el mallado de la figura siguiente:



Las coordenadas de los vértices son  $A(8 : 0 : 0)$ ,  $B(0 : 8 : 0)$ ,  $C(0 : 0 : 8)$  y, por ejemplo, el punto marcado por un pequeño cuadrado tiene de coordenadas  $(1 : 2 : 5)$ ; dada la capacidad de los vasos, la situación expresada por las coordenadas de este punto no puede presentarse; de hecho, los únicos puntos que podrían representar una distribución de agua en los vasos son los que están en el borde o interior del paralelogramo marcado; el vértice  $A(8 : 0 : 0)$  corresponde a la situación inicial.

Verter agua de un vaso a otro significa moverse de un nodo a otro a lo largo de una de las líneas de la malla (la cantidad de agua en el vaso restante no cambia). La única forma de medir una cantidad exacta es o bien llenando o vaciando completamente uno de los vasos; es decir, cada terna ha de tener un 0, ó un 8 en la primera, ó un 5 en la segunda, ó un 3 en la tercera. Por tanto, sólo nos podemos mover sobre el borde del paralelogramo marcado.

<sup>(1)</sup> Alex Bogolmony, <http://www.cut-the-knot.org/triangle/glasses.shtml>

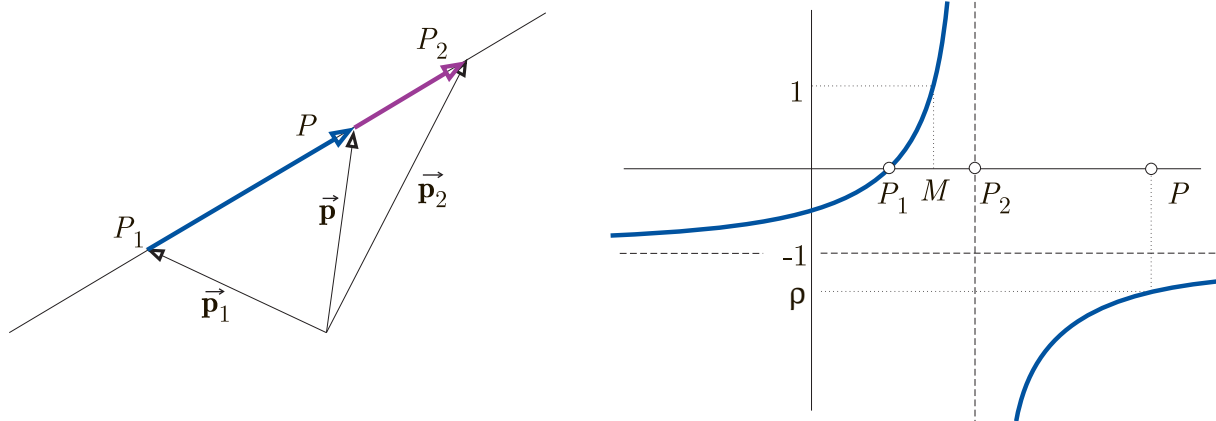
Inicialmente, el primer vaso está lleno, con lo que partimos del vértice  $A(8 : 0 : 0)$ ; desde éste sólo son posibles dos movimientos: a lo largo de la línea para la que  $z = 0$ , hasta el nodo  $(3 : 5 : 0)$ , o a lo largo del lado con  $y = 0$ , hasta el nodo  $(5 : 0 : 3)$ . Resolver el problema es similar a jugar al billar sobre un tablero triangular. Existen exactamente tres nodos (marcados con un círculo, sobre los lados del paralelogramo) cuyas coordenadas contienen al menos un 4, que son:  $(4 : 4 : 0)$ ,  $(4 : 1 : 3)$ ,  $(1 : 4 : 3)$ . El problema será resuelto cuando la bola llegue a uno de estos tres puntos. En la figura se muestra un posible recorrido:

$$(8 : 0 : 0) \rightarrow (3 : 5 : 0) \rightarrow (3 : 2 : 3) \rightarrow (6 : 2 : 0) \rightarrow (6 : 0 : 2) \rightarrow (1 : 5 : 2) \rightarrow (1 : 4 : 3).$$

Es decir: primeramente, se llena el segundo vaso desde el primero; se llena el tercero desde el segundo; se vacía el tercero en el primero; se vacía el segundo en el tercero; se llena el segundo desde el primero; y, finalmente, se llena el tercero desde el segundo.

## 5 Dividir un segmento. Ecuación de la recta

**5.1** Si un punto  $P$  divide al segmento, determinado por dos puntos distintos  $P_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2$ , en la razón  $\rho$  (es decir, si  $P_1P/PP_2 = \rho$ ), entonces  $\vec{p} - \vec{p}_1 = \rho(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)$ , y de  $\vec{p}_i = x_i \vec{a} + y_i \vec{b} + z_i \vec{c}$  ( $i = 1, 2$ ), se obtiene



$$(1 + \rho) \vec{p} = (x_1 + \rho x_2) \vec{a} + (y_1 + \rho y_2) \vec{b} + (z_1 + \rho z_2) \vec{c}.$$

Con lo que las coordenadas baricéntricas absolutas y homogéneas del punto  $P$ , que divide al segmento  $P_1P_2$  en la razón  $\rho$ , son

$$\left( \frac{x_1 + \rho x_2}{1 + \rho}, \frac{y_1 + \rho y_2}{1 + \rho}, \frac{z_1 + \rho z_2}{1 + \rho} \right), \quad (x_1 + \rho x_2 : y_1 + \rho y_2 : z_1 + \rho z_2).$$

En particular, los puntos medios de los lados  $BC, CA$  y  $AB$ , se obtienen para  $\rho = 1$ ,

$$M_a(0 : 1 : 1), \quad M_b(1 : 0 : 1), \quad M_c(1 : 1 : 0), \quad (5.11)$$

Si los puntos  $P_i(x_i : y_i : z_i)$ ,  $i = 1, 2$ , vienen dados en coordenadas baricéntricas homogéneas, tales que  $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2$ , el punto  $P$  que separa  $P_1$  y  $P_2$  en la razón  $m/n$  ( $P_1P/PP_2 = m/n = \rho$ ) es

$$P(nx_1 + mx_2 : ny_1 + my_2 : nz_1 + mz_2). \quad (5.12)$$

Cuando  $m = -n$  (ó  $\rho = -1$ ), se obtiene

$$P(x_1 - x_2 : y_1 - y_2 : z_1 - z_2), \tag{5.13}$$

que es el punto del infinito de la recta  $P_1P_2$ , siempre que se verifique  $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2$ . En este caso, la suma de las coordenadas de  $P$  es igual a cero y no tiene coordenadas baricéntricas absolutas. Como  $P_1 \neq P_2$ , un punto del infinito no puede ser de la forma  $(0 : 0 : 0)$ . En particular, los puntos del infinito de los lados  $BC, CA$  y  $AB$ , del triángulo de referencia, son

$$(0 : 1 : -1), \quad (-1 : 0 : 1), \quad (1 : -1 : 0). \tag{5.14}$$

Si queremos obtener el punto  $P'$  simétrico de  $P$  respecto a  $Q$ , utilizamos que  $PP'/P'Q = 2/-1$ , con lo que si  $P(x : y : z)$  y  $Q(x_0 : y_0 : z_0)$ , las coordenadas de  $P'(x' : y' : z')$  son

$$\begin{aligned} x' &= 2(x + y + z)x_0 - (x_0 + y_0 + z_0)x \\ y' &= 2(x + y + z)y_0 - (x_0 + y_0 + z_0)y \\ z' &= 2(x + y + z)z_0 - (x_0 + y_0 + z_0)z. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Ecuaciones de una homotecia de centro en  $P(u : v : w)$  y razón  $k$  ( $\overrightarrow{PX'} = k \overrightarrow{PX}$ ):

Las coordenadas del homólogo  $X'(x' : y' : z')$  de un punto  $X(x : y : z)$ , mediante la homotecia de centro en  $P(u : v : w)$  y razón  $k$ ,  $X'P/PX = -k/1$ , se obtienen resolviendo, en las variables  $x', y', z'$ , las ecuaciones

$$(x + y + z)(x' : y' : z') - k(x' + y' + z')(x : y : z) = t(u : v : w),$$

con lo que las ecuaciones de la homotecia son:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + kv + kw & (1 - k)u & (1 - k)u \\ (1 - k)v & ku + v + kw & (1 - k)v \\ (1 - k)w & (1 - k)w & ku + kv + w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

O bien de esta forma:

$$\begin{aligned} x' &= kx(u + v + w) + (1 - k)u(x + y + z) \\ y' &= ky(u + v + w) + (1 - k)v(x + y + z) \\ z' &= kz(u + v + w) + (1 - k)w(x + y + z). \end{aligned} \tag{5.17}$$

**5.2** Si en la expresión (5.12) de las coordenadas del punto  $P$ , que divide al segmento  $P_1P_2$  en la razón  $m/n$ , se varían los valores de  $m$  y  $n$ ,  $P$  recorre los puntos de la recta  $P_1P_2$ , cuya ecuación se obtiene eliminando  $m$  y  $n$  entre las ecuaciones

$$kx = nx_1 + mx_2, \quad ky = ny_1 + my_2, \quad kz = nz_1 + mz_2,$$

resultando como ecuación de la recta  $P_1P_2$ :

$$px + qy + rz = 0, \tag{5.18}$$

donde,

$$p = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \quad q = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}, \quad r = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix},$$



son los coeficientes o coordenadas baricéntricas  $(p : q : r)$  de la recta. Con lo que se puede escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos <sup>(1)</sup>  $P_1(x_1 : y_1 : z_1)$  y  $P_2(x_2 : y_2 : z_2)$  como

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.19)$$

Un caso particular es la ecuación (recta del infinito)

$$x + y + z = 0, \quad (5.20)$$

que se satisface por los puntos del infinito. Así, el punto del infinito de la recta  $px + qy + rz = 0$  es

$$(q - r : r - p : p - q). \quad (5.21)$$

Dos rectas son paralelas si tienen el mismo punto del infinito. Así, la recta paralela a la de ecuación  $px + qy + rz = 0$  y que pasa por  $P_0(x_0 : y_0 : z_0)$ , tiene por ecuación

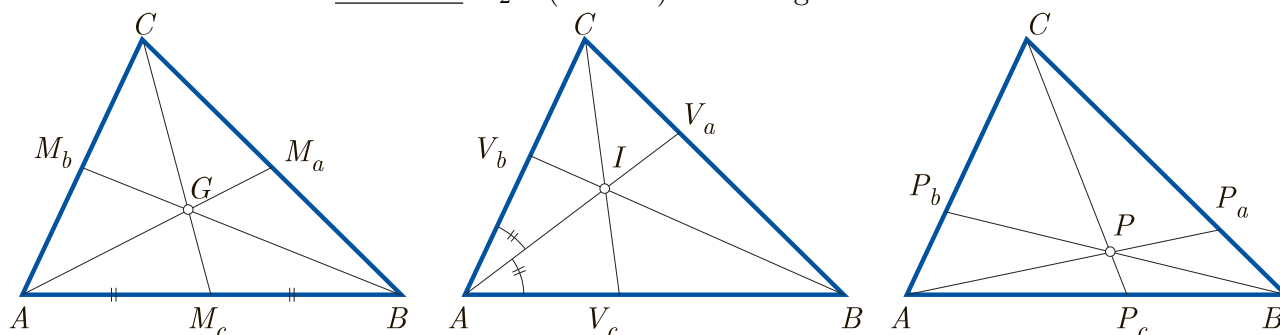
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ q - r & r - p & p - q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ r - p & p - q \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} z_0 & x_0 \\ p - q & q - r \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ q - r & r - p \end{vmatrix} z = 0. \quad (5.22)$$

## 6 Medianas, bisectrices y alturas

**6.1** Como ejemplo de ecuaciones de rectas, se tiene que las de las medianas, que unen los vértices con los puntos medios (5.11) de los lados opuestos, son

$$AM_a : y - z = 0, \quad BM_b : z - x = 0, \quad CM_c : x - y = 0, \quad (6.23)$$

las cuales se cortan en el baricentro  $X_2 G(1 : 1 : 1)$  del triángulo  $\widehat{ABC}$ .



El incentro de  $\widehat{ABC}$  es el punto de intersección de las bisectrices interiores. Para determinar sus coordenadas, se puede usar el hecho de que cada bisectriz divide al lado opuesto en la razón de las longitudes de los lados adyacentes <sup>(2)</sup>. Si  $V_a$  es el punto de corte de la bisectriz en  $A$  con el lado  $BC$ , se tiene que  $BV_a/V_aC = c/b$ . Luego, las coordenadas de  $V_a$  son  $b(0 : 1 : 0) + c(0 : 0 : 1) = (0 : b : c)$ . Así mismo, las bisectrices en  $B$  y  $C$  cortan a los lados opuestos en  $V_b(a : 0 : c)$  y  $V_c(a : b : 0)$ , respectivamente. Se concluye que las ecuaciones de las bisectrices interiores son

<sup>(1)</sup> Obsérvese que si bien hemos obtenido la ecuación de la recta que pasa por dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ , exigiendo que sus coordenadas verifiquen  $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2$ , ella es válida aunque la suma de las coordenadas de los puntos dados no sea la misma. Pues, basta con tomar como coordenadas  $(x'_i : y'_i : z'_i) = (x_j + y_j + z_j)(x_i : y_i : z_i)$ ,  $i \neq j$  y la ecuación que se obtiene es  $p'x + q'y + r'z = (x_1 + y_1 + z_1)(x_2 + y_2 + z_2)(px + qy + rz) = 0$ .

<sup>(2)</sup> Posteriormente, pág. 50, utilizando la noción de giro en coordenadas baricéntricas, se obtienen las coordenadas del incentro, sin usar explícitamente el teorema de las bisectrices.

$$AV_a: -cy + bz = 0, \quad BV_b: cx - az = 0, \quad AV_c: -bx + ay = 0, \quad (6.24)$$

que se cortan en el incentro  $I(a : b : c)$ .

**6.2** Dado un punto  $P$ , a las rectas que lo unen a los vértices de un triángulo,  $AP, BP$  y  $CP$ , se les denomina tradicionalmente cevianas de  $P$ . Si  $P(x : y : z)$ , los puntos de corte de sus cevianas con los lados (pies de las cevianas) forman un triángulo  $P_aP_bP_c$ , denominado triángulo ceviano de  $P$ , cuyos vértices <sup>(1)</sup> son:

$$P_a(0 : y : z), \quad P_b(x : 0 : z), \quad P_c(x : y : 0). \quad (6.25)$$

Recíprocamente, si éstas son, respectivamente, las coordenadas de tres puntos  $D, E, F$ , entonces las rectas  $AD, BE$  y  $CF$  se cortan en el punto de coordenadas  $(x : y : z)$ .

Al triángulo ceviano del baricentro  $M_aM_bM_c$  se le denomina triángulo medial.

Una situación más general consiste en tomar tres puntos  $X, Y$  y  $Z$  cuyas coordenadas se escriben en la forma

$$X(\xi : y : z), \quad Y(x : \eta : z), \quad Z(x : y : \zeta),$$

entonces las rectas  $AX, BY$  y  $CZ$  concurren en el punto  $P(x : y : z)$  y se dice que los triángulos  $ABC$  y  $XYZ$  son perspectivos y al punto  $P$  se le llama centro de perspectividad.

Por el teorema de Desargues, los puntos  $BC \cap YZ, CA \cap ZX$  y  $AB \cap XY$  están en una recta, denominada eje de perspectividad. Las coordenadas baricéntricas (o coeficientes)  $(u : v : w)$  del eje, en función de las coordenadas de  $X, Y$  y  $Z$ , son:

$$((y - \eta)(z - \zeta) : (z - \zeta)(x - \xi) : (x - \xi)(y - \eta)) = \left( \frac{1}{x - \xi} : \frac{1}{y - \eta} : \frac{1}{z - \zeta} \right).$$

Además, si  $(\alpha : v : w), (u : \beta : w)$  y  $(u : v : \gamma)$  son las coordenadas de tres rectas, el triángulo determinado por ellas es perspectivo con  $ABC$ ; el eje de perspectividad es la recta  $(u : v : w)$  y el centro de perspectividad es

$$((v - \beta)(w - \gamma) : (w - \gamma)(u - \alpha) : (u - \alpha)(v - \beta)) = \left( \frac{1}{u - \alpha} : \frac{1}{v - \beta} : \frac{1}{w - \gamma} \right).$$

**6.3** Como un primer uso de este hecho vamos a determinar las coordenadas del punto de intersección de las alturas (en los párrafos § 8 y § 12 tratamos de nuevo este punto). Sea  $H_c$  el pie de la altura desde el vértice  $C$ , entonces las proyecciones de los lados  $AC$  y  $BC$  sobre la recta  $AB$  son, respectivamente,  $AH_c = b \cos A$  y  $H_cB = a \cos B$ ; por lo que, las coordenadas de  $H_c$  son de la forma  $(a \cos B : b \cos A : 0)$ , que podemos poner de cualquiera de las formas siguientes:

$$\left( \frac{a}{\cos A} : \frac{b}{\cos B} : 0 \right) = (\operatorname{tag} A : \operatorname{tag} B : 0) = \left( \frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : 0 \right).$$

Procediendo de forma similar con las alturas desde los otros vértices, los pies de las tres alturas son:

$$\left( 0 : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C} \right), \quad \left( \frac{1}{S_A} : 0 : \frac{1}{S_C} \right), \quad \left( \frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : 0 \right).$$

Con lo que las tres alturas concurren en el punto denominado ortocentro de coordenadas

$$H \left( \frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C} \right) = \left( \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} : \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right) = (\operatorname{tag} A : \operatorname{tag} B : \operatorname{tag} C).$$

<sup>(1)</sup> Para la notación  $P_a, P_b, P_c$  de los pies de las cevianas del punto  $P$ , haremos una excepción en los casos del baricentro  $G$  y del incentro  $I$ , que denotamos por  $M_a, M_b, M_c$  y  $V_a, V_b, V_c$ , respectivamente; reservando la notación  $I_a, I_b, I_c$  para los centros (12.51) de las circunferencias exinscritas.

## 7 Interpretación de las coordenadas baricéntricas mediante áreas

**7.1** Si se toma un punto  $P(x : y : z)$  sobre la recta determinada por los puntos  $P_i(x_i : y_i : z_i)$ ,  $i = 1, 2$ , para encontrar la razón en que  $P$  divide al segmento  $P_1P_2$ , se ha de resolver, en las variables  $k, m$  y  $n$ , las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} kx &= n(x_2 + y_2 + z_2)x_1 + m(x_1 + y_1 + z_1)x_2, \\ ky &= n(x_2 + y_2 + z_2)y_1 + m(x_1 + y_1 + z_1)y_2, \\ kz &= n(x_2 + y_2 + z_2)z_1 + m(x_1 + y_1 + z_1)z_2, \end{aligned}$$

las cuales tienen solución, pues al estar  $P, P_1$  y  $P_2$  alineados, se anula el determinante (5.19) formado por sus coeficientes.

El valor  $\frac{m}{n} = \frac{P_1P}{PP_2}$ , que se obtiene, es la razón en que  $P$  divide a  $P_1P_2$ :

$$-\frac{m}{n} = \frac{(x_1y - xy_1)(x_2 + y_2 + z_2)}{(x_2y - xy_2)(x_1 + y_1 + z_1)} = \frac{(y_1z - yz_1)(x_2 + y_2 + z_2)}{(y_2z - yz_2)(x_1 + y_1 + z_1)} = \frac{(x_1z - xz_1)(x_2 + y_2 + z_2)}{(x_2z - xz_2)(x_1 + y_1 + z_1)}. \quad (7.26)$$

Como aplicación de estos cálculos, se obtiene que

Las coordenadas baricéntricas de un punto  $P(x : y : z)$  son proporcionales a las áreas orientadas de los triángulos que él forma con cada par de vértices del triángulo de referencia.

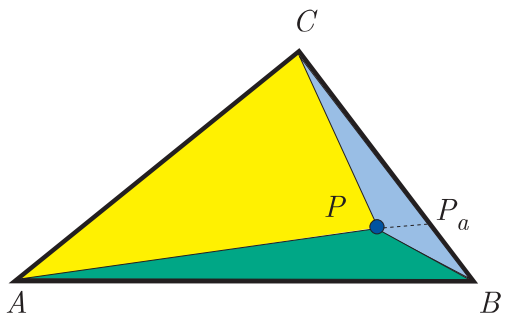
En efecto, sea  $P_a(0 : y : z)$  el punto de corte de la recta  $AP$  con  $BC$  (pie de la ceviana  $AP$ ), se tienen las siguientes razones entre áreas de triángulos:

$$\frac{\widehat{\text{área}}\widehat{ABP}_a}{\widehat{\text{área}}\widehat{ABP}} = \frac{AP_a}{AP} = -\frac{P_aA}{AP} = \frac{x + y + z}{y + z}, \quad \frac{\widehat{\text{área}}\widehat{ABP}_a}{\widehat{\text{área}}\widehat{ABC}} = \frac{BP_a}{BC} = -\frac{P_aB}{BC} = \frac{z}{y + z},$$

pues tienen la misma altura relativa al vértice  $B$ , unos, y al vértice  $A$ , los otros. Se sigue que

$$\widehat{\text{área}}\widehat{ABP} = \frac{y + z}{x + y + z} \widehat{\text{área}}\widehat{ABP}_a = \frac{z}{x + y + z} \widehat{\text{área}}\widehat{ABC}.$$

Obteniéndose análogos resultados para las áreas de los triángulos  $\widehat{BCP}$  y  $\widehat{CAP}$ , con lo que se tienen las siguientes expresiones para las áreas ( $\Delta = \widehat{\text{área}}\widehat{ABC}$ ):



$$\begin{aligned} \widehat{\text{área}}\widehat{ABP} &= \frac{z}{x + y + z} \Delta, \\ \widehat{\text{área}}\widehat{BCP} &= \frac{x}{x + y + z} \Delta, \\ \widehat{\text{área}}\widehat{CAP} &= \frac{y}{x + y + z} \Delta. \end{aligned}$$

$$\widehat{\text{área}}\widehat{ABC} = \widehat{\text{área}}\widehat{BCP} + \widehat{\text{área}}\widehat{CAP} + \widehat{\text{área}}\widehat{ABP}.$$

$$(x : y : z) = (\widehat{\text{área}}\widehat{BCP} : \widehat{\text{área}}\widehat{CAP} : \widehat{\text{área}}\widehat{ABP}). \quad (7.27)$$

Debido a este hecho es por lo que a las coordenadas baricéntricas también se conocen como coordenadas areales. Se entiende que el área de un triángulo  $\widehat{XYZ}$  es cero si  $X, Y, Z$  están alineados, positiva si la orientación de los vértices es en el sentido contrario a las agujas de un reloj y negativa en otro caso.

**7.2 Área de un triángulo:** Respecto a un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, los vértices del triángulo de referencia vienen dados por  $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$  y su área es:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Vamos a determinar la expresión del área de una triángulo de vértices  $D, E$  y  $F$  de coordenadas cartesianas  $(d_1, d_2), (e_1, e_2), (f_1, f_2)$ , respectivamente, y con coordenadas baricéntricas absolutas

$$D(x_1, y_1, z_1), \quad E(x_2, y_2, z_2), \quad F(x_3, y_3, z_3).$$

Es decir, por (3.10),

$$\vec{d} = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b} + z_1 \vec{c}, \quad \vec{e} = x_2 \vec{a} + y_2 \vec{b} + z_2 \vec{c}, \quad \vec{f} = x_3 \vec{a} + y_3 \vec{b} + z_3 \vec{c},$$

con  $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2 = x_3 + y_3 + z_3 = 1$ . Estas expresiones vectoriales se pueden poner en forma matricial como sigue

$$\begin{pmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

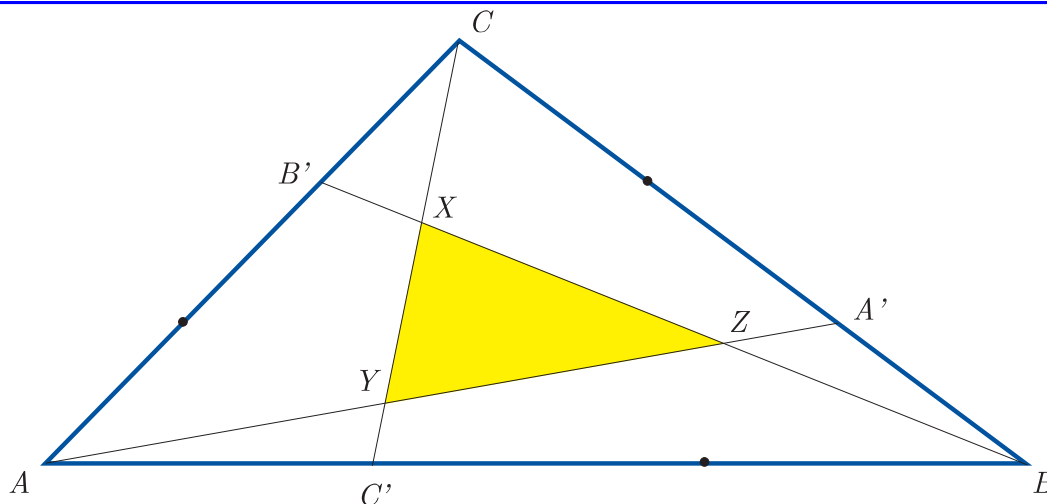
Tomando determinante, resulta la fórmula del área de  $\widehat{DEF}$  en términos de las coordenadas baricéntricas absolutas de sus vértices y del área de  $\widehat{ABC}$ :

$$\text{área}\widehat{DEF} = \text{área}\widehat{ABC} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Ejemplos:

En un triángulo  $\widehat{ABC}$  se traza el segmento que va desde  $A$  al punto  $A'$  que divide a  $BC$  en tres partes iguales (más cerca de  $B$ ); análogamente, se trazan cíclicamente los segmentos  $BB'$  y  $CC'$ . Estos tres segmentos se cortan en tres puntos  $X, Y, Z$ , entonces se verifica la siguiente relación entre áreas:

$$7 \text{área}\widehat{XYZ} = \text{área}\widehat{ABC}.$$



Se tiene que  $A'(0 : 2 : 1)$ ,  $B'(1 : 0 : 2)$  y  $C'(2 : 1 : 0)$ . Las coordenadas de  $Z(1 : 4 : 2)$  se pueden obtener resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las rectas  $AA'$  y  $BB'$ ,  $y - 2z = 0$ ,  $2x - z = 0$ . Similarmente, llegamos a que  $X(2 : 1 : 4)$  e  $Y(4 : 2 : 1)$ . Así,

$$\widehat{\text{área}}XYZ = \frac{1}{7^3} \widehat{\text{área}}ABC \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{7} \widehat{\text{área}}ABC.$$

□

Si  $P(u : v : w)$  es un punto en el plano del triángulo  $\widehat{ABC}$ , el área de su triángulo pedal (12.48)  $A_P B_P C_P$ , de vértices  $A_P(0 : a^2v + uS_C : a^2w + uS_B)$ ,  $B_P(b^2u + vS_C : 0 : b^2w + vS_A)$ ,  $C_P(c^2u + wS_B : c^2v + wS_A : 0)$ , es

$$\widehat{\text{área}}A_P B_P C_P = \frac{S^3(a^2vw + b^2wu + c^2uv)}{2a^2b^2c^2(u + v + w)^2}$$

El producto de las sumas de las coordenadas de los vértices del triángulo pedal de  $P$  es  $a^2b^2c^2(u + v + w)^3$  y el determinante formado por ellas vale  $S^2(a^2vw + b^2wu + c^2uv)(u + v + w)$ ; por lo que el área es la anunciada. Obsérvese que si  $P$  está en la circunferencia circunscrita (19.69),  $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$ , el área es cero: los vértices del triángulo pedal de  $P$  están alineados, en la recta de Simson–Wallace de  $P$ .

Usando la expresión de la potencia (19.70) de un punto respecto a una circunferencia y las  $S = bc \operatorname{sen} A = ca \operatorname{sen} B = ab \operatorname{sen} C$ , esta fórmula <sup>(1)</sup> del área de triángulo pedal de  $P$ , también se puede poner de la forma:

$$\widehat{\text{área}}A_P B_P C_P = \frac{(R^2 - PO^2)}{2} \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C,$$

donde  $R$  es el radio de la circunferencia circunscrita a  $\widehat{ABC}$  y  $O$  es su centro ( $R^2 - PO^2$  es la potencia de  $P$  respecto a la circunferencia circunscrita). □

En particular, el área del triángulo de contacto interior (triángulo pedal del incentro  $I(a : b : c)$ ) es, utilizando las fórmulas (2.5) y (2.6) para los radios  $R$  y  $r$  de las circunferencias circunscritas e inscritas,

$$\widehat{\text{área}}A_I B_I C_I = \frac{r}{2R} \widehat{\text{área}}ABC.$$

De la expresión del área del triángulo pedal de un punto  $P$ , se deduce que ésta es constante igual  $k$ , si el punto  $P$  está en la circunferencia (§19.1) de centro en  $O$  (el de la circunferencia circunscrita), de ecuación:

$$S^3(a^2yz + b^2zx + c^2xy) - 2ka^2b^2c^2(x + y + z)^2 = 0.$$

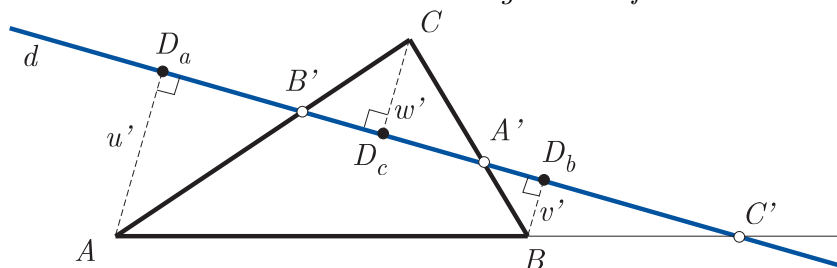
Este resultado se puede considerar como una generalización del Teorema de Simson–Wallace (una generalización proyectiva en <http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2315.pdf>):

”La condición necesaria y suficiente para que los pies de las perpendiculares trazadas desde un punto a los lados de un triángulo estén alineados es que dicho punto esté en la circunferencia circunscrita al triángulo”.

<sup>(1)</sup> Una demostración sintética se puede ver en:

<http://www.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/problems/AreaOfPedal.html>

**7.3** Podemos dar la siguiente interpretación de las coordenadas baricéntricas de una recta (pág.8); se tiene que "las coordenadas baricéntricas de una recta  $d(u : v : w)$  son proporcionales a las distancias orientadas de los vértices del triángulo de referencia a la recta".



En efecto, los puntos de corte de la recta  $d \equiv ux + vy + wz = 0$  con los lados del triángulo son

$$A'(0 : -w : v), \quad B'(w : 0 : -u), \quad C'(-v : u : 0).$$

Luego, se tienen las siguientes relaciones<sup>(1)</sup>

$$\frac{AC'}{BC'} = -\frac{AC'}{C'B} = \frac{u}{v}, \quad \frac{BA'}{CA'} = -\frac{BA'}{A'C} = \frac{v}{w}, \quad \frac{CB'}{AB'} = -\frac{CB'}{B'A} = \frac{w}{u}.$$

Y por la semejanza de los triángulos  $\widehat{C'AD_a} \sim \widehat{C'BD_b}$ ,  $\widehat{A'BD_b} \sim \widehat{A'CD_c}$ ,  $\widehat{B'CD_c} \sim \widehat{B'AD_a}$ , resulta que

$$\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'}, \quad \frac{v}{w} = \frac{v'}{w'}, \quad \frac{w}{u} = \frac{w'}{u'}, \quad \text{o bien} \quad \frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} = \frac{w'}{w}.$$

En definitiva, las distancias  $u', v', w'$  de los vértices  $A, B, C$  a una recta, dan las coordenadas baricéntricas de ésta; entendiendo que el signo de cada una de estas distancias hay que tomarlo positivo o negativo, según que los puntos de corte  $A', B', C'$  con los lados estén dentro o fuera (respectivamente) de los segmentos  $BC, CA, AB$ . Por ejemplo, para la recta de la figura los signos de sus coordenadas son  $(+ + -)$ .

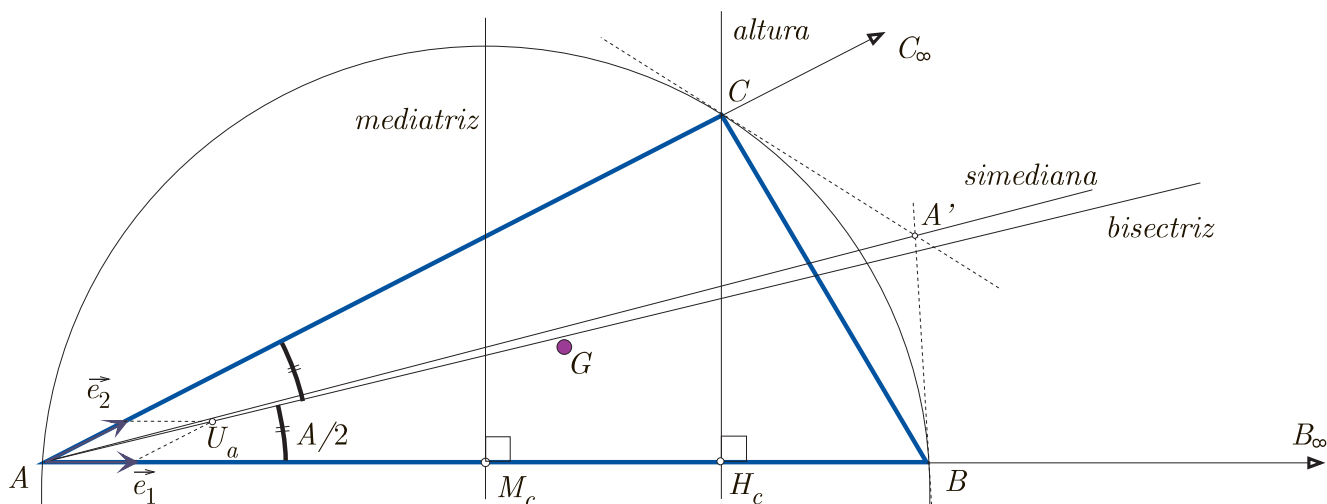
## 8 Coordenadas baricéntricas y referencia proyectiva

**8.1** En este párrafo, veremos como las coordenadas baricéntricas son las coordenadas homogéneas, relativas a la referencia proyectiva  $\{A, B, C; G\}$ . Como ejemplos de esta visión, obtendremos algunos resultados que posteriormente serán deducido de nuevo, desde otro punto de vista. Por ejemplo, deduciremos las ecuaciones de las alturas, de las bisectrices, de las mediatrices y de la ecuación de la circunferencia circunscrita a un triángulo  $\widehat{ABC}$ . De hecho, toda la geometría euclidiana se puede construir con esta referencia proyectiva. En el párrafo § 9.2 se da un mismo enfoque para las coordenadas trilineales.

Dado un triángulo  $\widehat{ABC}$ , consideremos la referencia afín euclídea  $\{A; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , formada por el vértice  $A$  y los vectores unitarios  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$  con origen en  $A$  y sentido el de  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$ , respectivamente. En esta referencia, las coordenadas de los vértices y del baricentro (o centro de gravedad) de  $\widehat{ABC}$  son  $A(0, 0)$ ,  $B(c, 0)$ ,  $C(0, b)$  y  $G(c/3, b/3)$ .

<sup>(1)</sup> De estas relaciones, surge el Teorema de Menelao:

$$A', B', C' \text{ están alineados} \Leftrightarrow \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1.$$



En el plano proyectivo obtenido ampliando el plano afín con la recta del infinito y respecto a la referencia proyectiva  $\bar{\mathcal{R}}_a = \{A, B_\infty, C_\infty; U_a\}$  (el vértice  $A$ , los puntos del infinito de los ejes coordenados  $AB$  y  $AC$  y el punto unidad  $U_a(1, 1)$ ), se tiene que

$$A(1, 0, 0), \quad B(1, c, 0), \quad C(1, 0, b), \quad G(3, c, b).$$

Tomando estos puntos como una nueva referencia proyectiva  $\mathcal{R} = \{A, B, C; G\}$ , con punto unidad en  $G$ , se tienen las expresiones de cambio de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  y  $(x, y, z)$  de un punto respecto a las referencias  $\bar{\mathcal{R}}_a$  y  $\mathcal{R}$ :

$$\lambda \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

O bien,

$$\begin{aligned} \lambda \bar{x} &= x + y + z & \mu x &= bc\bar{x} - b\bar{y} - c\bar{z} \\ \lambda \bar{y} &= cy & \mu y &= b\bar{y} \\ \lambda \bar{z} &= bz & \mu z &= c\bar{z} \end{aligned} \tag{8.28}$$

Las coordenadas de los vértices y del baricentro de  $\widehat{ABC}$  en la referencia  $\mathcal{R}$  se pueden deducir de sus coordenadas respecto a  $\bar{\mathcal{R}}_a$ , usando las segundas relaciones de (8.28); y son las que realmente deben ser, por determinar tal referencia, es decir

$$A(1, 0, 0), \quad B(0, 1, 0), \quad C(0, 0, 1), \quad G(1, 1, 1).$$

Las coordenadas homogéneas en la referencia proyectiva  $\{A, B, C; G\}$  son las coordenadas baricéntricas respecto a  $\widehat{ABC}$ .

**8.2** Haciendo uso de los cambios de coordenadas (8.28), podemos obtener las expresiones en coordenadas baricéntricas, si se conocen sus expresiones respecto a la referencia  $\bar{\mathcal{R}}_a$ . Aunque no va a ser el camino que seguiremos en este estudio, a modo de ejemplos vamos a ver unos casos concretos:

Las coordenadas del punto medio  $M_c(c/2, 0)$  de  $AB$  en  $\bar{\mathcal{R}}_a$  son  $M_c(2, c, 0)$  y respecto a  $\mathcal{R}$  son, entonces,  $(2bc - bc : bc : 0) = (1 : 1 : 0)$ . La recta del infinito del plano en  $\bar{\mathcal{R}}_a$  es  $\bar{x} = 0$  y, por tanto,  $x + y + z = 0$ , en coordenadas baricéntricas.

Como otro ejemplo podemos poner el de las ecuaciones de las mediatrices y alturas (que volveremos a tratar en § 12.2) así como las de las bisectrices, dadas ya en (6.24). Una recta perpendicular al lado  $AB$  tendrá la dirección del vector  $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2$ , tal que  $0 = \vec{e}_1 \cdot \vec{v} = v_1 + v_2 \cos A$ ;

por lo que la mediatriz de  $AB$  (perpendicular en el punto medio  $M_c(c/2, 0)$ ) tiene por ecuación paramétrica, en la referencia afín euclídea inicial,  $Y = c/2 + t \cos A$ ,  $Z = -t$ , y en la referencia  $\bar{\mathcal{R}}_a$ ,  $c\bar{x} - 2\bar{y} - 2\bar{z} \cos A = 0$ . De aquí, usando las primeras transformaciones de (8.28), se obtiene que, en coordenadas baricéntricas, la ecuación de la mediatriz es

$$c(x + y + z) - 2cy - 2bz \cos A = 0, \quad \text{ó} \quad c^2x - c^2y + (c^2 - 2bc \cos A)z = 0.$$

Usando el teorema del coseno, se llega a la última de las ecuaciones siguientes (las dos primeras <sup>(1)</sup> son las de las mediatrices a los lados  $BC$  y  $CA$ ):

$$(b^2 - c^2)x + a^2y - a^2z = 0, \quad -b^2x + (c^2 - a^2)y + b^2z = 0 \quad c^2x - c^2y + (a^2 - b^2)z = 0.$$

Similarmente, las ecuaciones paramétricas de la altura por  $C$  son  $Y = t \cos A$ ,  $Z = b - t$ , y su ecuación cartesiana respecto a  $\bar{\mathcal{R}}_a$  es  $-b \cos A \bar{x} + \bar{y} + \cos A \bar{z} = 0$ . De la que se deduce la ecuación  $cy - (x + y)b \cos A = 0$ , en coordenadas baricéntricas. Haciendo uso de nuevo del teorema de coseno y procediendo de la misma forma para las otras alturas, se llega a que las ecuaciones baricéntricas de las alturas son

$$AH_a : S_B y - S_C z = 0, \quad BH_b : -S_A x + S_C z = 0, \quad CH_c : S_A x - S_B y = 0.$$

Obtenidas estas ecuaciones de mediatrices y alturas, podemos hallar las ecuaciones de las primeras conociendo las de las segundas y, viceversa, se pueden obtener las ecuaciones de las alturas, conocidas las de las mediatrices. Por ejemplo, la ecuación de la mediatriz del lado  $BC$  es la de la recta que pasa por  $M_a(0 : 1 : 1)$  y por el punto del infinito de la altura  $AH_a$ ,  $S_B y - S_C z = 0$ ; siendo las coordenadas de éste

$$\left( \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ S_B & -S_C & \end{array} \right) : \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ -S_C & 0 & \end{array} \right) : \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ 0 & S_B & \end{array} \right) \right) = (-(S_C + S_B) : S_C : S_B) = (-a^2 : S_C : S_B).$$

El punto de concurrencia de las mediatrices es el circuncentro y el de las altura es el ortocentro; las coordenadas baricéntricas, que se obtienen resolviendo los dos sistemas formados por las ecuaciones de dichas rectas, se dan en la página 32.

La bisectriz de  $\widehat{BAC}$  tiene la dirección del vector  $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2$ , que forma el mismo ángulo con  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$ ; entonces,  $v_1 = v_2$ ; por lo que la ecuación de dicha bisectriz en la referencia  $\{A; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  es  $Z = Y$ , y respecto a  $\bar{\mathcal{R}}_a$  es  $\bar{y} - \bar{z} = 0$ ; con lo que su ecuación baricéntrica es  $cy - bz = 0$ , dada en (6.24).

<sup>(1)</sup> Para obtener la ecuación de la mediatriz al lado  $BC$ , podemos partir de la referencia afín euclídea  $\{B; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , formada por el vértice  $B$  y los vectores unitarios  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$  con origen en  $B$  y sentido el de  $\overrightarrow{BC}$  y  $\overrightarrow{BA}$ , respectivamente. En esta situación el cambio de coordenadas entre la referencia proyectiva  $\bar{\mathcal{R}}_b = \{B, C_\infty, A_\infty; U_b\}$ , deducida de ésta, y las coordenadas baricéntricas, relativas a la referencia proyectiva  $\mathcal{R} = \{A, B, C; G\}$ , son

$$\begin{array}{ll} \lambda \bar{x} & = cx & \mu x & = a\bar{x} \\ \lambda \bar{y} & = x + y + z & \mu y & = -a\bar{x} + ac\bar{y} - c\bar{z} \\ \lambda \bar{z} & = az & \mu z & = c\bar{z} \end{array}$$

Una recta perpendicular al lado  $BC$  tendrá la dirección del vector  $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2$ , tal que  $0 = \vec{e}_1 \cdot \vec{v} = v_1 + v_2 \cos B$ ; por lo que la mediatriz de  $BC$  (perpendicular en el punto medio  $M_a(a/2, 0)$ ) tiene por ecuación paramétrica, en la referencia afín euclídea que hemos tomado aquí,  $Z = a/2 + t \cos B$ ,  $X = -t$ , y, en la referencia  $\bar{\mathcal{R}}_b$ ,  $-2\bar{x} \cos B - a\bar{y} + 2\bar{z} = 0 = 0$ . Por lo que la ecuación de la mediatriz a  $BC$ , en coordenadas baricéntricas, es

$$-2cx \cos B - a(x + y + z) + 2az = 0, \quad \text{ó} \quad (-a^2 - 2ac \cos B)x - a^2y + a^2z = 0.$$



**8.3** Por lo expuesto, podemos utilizar cualquier herramienta de geometría proyectiva para obtener expresiones en coordenadas baricéntricas de objetos en el plano. Así, por ejemplo, vamos a determinar la ecuación de la recta que une el vértice  $A$  con el punto de intersección de las tangentes en  $B$  y  $C$  a su circunferencia circunscrita.

Ya que toda circunferencia pasa por los puntos cíclicos del plano, es decir, por aquellos puntos impropios determinados por direcciones perpendiculares a sí mismas, debemos expresar sus coordenadas respecto a la referencia  $\bar{\mathcal{R}}_a$ .

La recta de vector director  $\vec{e}_1 + m \vec{e}_2$  es perpendicular a la de dirección de  $\vec{e}_1 + m' \vec{e}_2$  si y sólo si

$$m' = -\frac{1 + 2m \cos A}{2 \cos A + m}.$$

Por lo que, una recta de dirección  $\vec{e}_1 + m \vec{e}_2$  es perpendicular a sí misma cuando se verifique que

$$m^2 + 2m \cos A + 1 = 0.$$

Y, por tanto, los puntos cíclicos <sup>(1)</sup> son

$$(0, 1, -\cos A \pm i \operatorname{sen} A).$$

Los coeficientes de la circunferencia  $f\bar{x}^2 + g\bar{y}^2 + h\bar{z}^2 + 2p\bar{y}\bar{z} + 2q\bar{z}\bar{x} + 2r\bar{x}\bar{y} = 0$  que pasa por estos puntos y por  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(1, c, 0)$  y  $C(1, 0, b)$ , han de satisfacer a las ecuaciones siguientes, que resultan de la sustitución de estos puntos:

$$f = 0, \quad cg + 2r = 0, \quad bh + 2q = 0, \quad g + h \cos 2A - 2p \cos A = 0, \quad -h \operatorname{sen} 2A + 2p \operatorname{sen} A = 0.$$

Resolviendo este sistema, se obtiene que la matriz asociada a la ecuación de la circunferencia circunscrita es

$$\begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & -2 & -2 \cos A \\ b & -2 \cos A & -2 \end{pmatrix}.$$

Las polares de  $B$  y  $C$  son

$$c^2\bar{x} - c\bar{y} + (b - 2c \cos A)\bar{z} = 0, \quad b^2\bar{x} + (c - 2b \cos A)\bar{y} - b\bar{z} = 0.$$

El punto de intersección de estas tangentes es  $A'(2 \cos A, b, c)$  y la ecuación de la recta  $AA'$  es  $c\bar{y} - b\bar{z} = 0$ , que en coordenadas baricéntricas se expresa por  $A'(-a^2 : b^2 : c^2)$  y  $c^2y - b^2z = 0$ . Se trata de la simediana (13.57) por  $A$ , simétrica de la mediana respecto a la bisectriz.

Procediendo de forma similar podemos obtener los puntos  $B'(a^2 : -b^2 : c^2)$  y  $C'(a^2 : b^2 : -c^2)$ , de intersección de las tangentes en  $C$  y  $\underline{A}$  y de las tangentes en  $A$  y  $B$ , respectivamente, a la circunferencia circunscrita. Al triángulo  $A'B'C'$  se le conoce como **triángulo tangencial**.

Las ecuaciones  $c^2x - a^2z = 0$  y  $b^2x - a^2y = 0$  de las simedianas relativas a  $B$  y  $C$  se obtienen de manera similar y el punto de intersección de las tres simedianas es el simediano,  $X_6$  en ETC (página 51),  $(a^2 : b^2 : c^2)$ .

— . —

La matriz asociada a la circunferencia circunscrita en coordenadas baricéntricas es:

(1) Usando las fórmulas (8.28), estas coordenadas de los puntos cíclicos se transforman en las baricéntricas, dadas en (19.72),

$$(S_C \pm iS : -b^2 : S_A \mp iS).$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & -2 & -2 \cos A \\ b & -2 \cos A & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con lo que la ecuación de la circunferencia circunscrita <sup>(1)</sup> queda de la forma:

$$a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy = 0.$$

**8.4** Ahora vamos a determinar las coordenadas baricéntricas del punto del infinito de una recta perpendicular a otra dada  $px + qy + rz = 0$ .

El punto del infinito de la recta  $px + qy + rz = 0$  es  $(q - r : r - p : p - q)$ ; las expresiones de este punto en la referencia  $\mathcal{R}_a$  es  $(0, c(r - p), b(p - q))$ . Cualquier recta que tenga este punto del infinito tiene como vector director, en la referencia  $\{A; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ,  $c(r - p) \vec{e}_1 + b(p - q) \vec{e}_2$ . Un vector  $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2$  perpendicular al anterior, debe verificar:

$$v_1 c(r - p) + (v_1 b(p - q) + v_2 c(r - p)) \cos A + v_2 b(p - q) = 0.$$

Luego, una recta perpendicular a  $px + qy + rz = 0$  tiene por vector director

$$(c(r - p) \cos A + b(p - q)) \vec{e}_1 - (b(p - q) \cos A + c(r - p)) \vec{e}_2.$$

El punto del infinito de una recta que tenga esta dirección es, entonces,

$$\left( 0, c(r - p) \cos A + b(p - q), -(b(p - q) \cos A + c(r - p)) \right).$$

Y sus coordenadas baricéntricas (en la referencia  $\mathcal{R}$ , usando las segundas transformaciones (8.28)) son:

$$\begin{aligned} & \left( -b(c(r - p) \cos A + b(p - q)) + c(b(p - q) \cos A + c(r - p)) : \right. \\ & \quad \left. b(c(r - p) \cos A + b(p - q)) : -c(b(p - q) \cos A + c(r - p)) \right), \\ & \left( (r - p)(c^2 + bc \cos A) - (p - q)(b^2 + bc \cos A) : (r - p)bc \cos A + b^2(p - q) : (q - p)bc \cos A - c^2(r - p) \right), \\ & \left( (r - p)S_B - (p - q)S_C : (r - p)S_A + (S_A + S_C)(p - q) : (q - p)S_A - (S_A + S_B)(r - p) \right), \\ & \left( (r - p)S_B - (p - q)S_C : (p - q)S_C - (q - r)S_A : (q - r)S_A - (r - p)S_B \right). \end{aligned} \quad (8.29)$$

Estas coordenadas son también obtenidas en (12.43).

<sup>(1)</sup> En el párrafo §19.1 vemos otras formas de llegar a su ecuación.

**8.5** Utilizando las fórmulas de cambio de referencias proyectivas podemos poner unos ejemplos que relacionan las coordenadas baricéntricas de un punto respecto a triángulos distintos.

Si las coordenadas baricéntricas de un punto  $P$ , respecto a  $\widehat{ABC}$  son  $(x : y : z)$  y queremos obtener su relación con las coordenadas baricéntricas  $(x' : y' : z')$ , respecto a otro triángulo  $A'B'C'$ , del que se conocen las coordenadas baricéntricas de sus vértices respecto a  $\widehat{ABC}$ , debemos dar una determinación fija a éstos para que la suma de los tres sea el baricentro  $G'$  de  $A'B'C'$ . Esto puede lograrse haciendo que las sumas de las coordenadas de cada uno de ellos sean las mismas.

Así, por ejemplo, si  $A'B'C'$  es el triángulo ceviano de  $P(p : q : r)$ , ponemos

$$A' \left( 0 : \frac{q}{q+r} : \frac{r}{q+r} \right), \quad B' \left( \frac{p}{r+p} : 0 : \frac{r}{r+p} \right), \quad C' \left( \frac{p}{p+q} : \frac{q}{p+q} : 0 \right).$$

La relación entre las coordenadas  $(x : y : z)$  y  $(x' : y' : z')$  es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{p}{r+p} & \frac{p}{p+q} \\ \frac{q}{q+r} & 0 & \frac{q}{p+q} \\ \frac{r}{q+r} & \frac{r}{r+p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Con lo que las ecuaciones de cambios de coordenadas pueden escribirse en la forma:

$$\begin{aligned} x &= p((p+q)(q+r)y' + (q+r)(r+p)z') & x' &= (q+r)(-qrx + rpy + pqz) \\ y &= q((r+p)(p+q)x' + (q+r)(r+p)z') & y' &= (r+p)(qrx - rpy + pqz) \\ z &= r((r+p)(p+q)x' + (p+q)(q+r)y') & z' &= (p+q)(qrx + rpy - pqz) \end{aligned}$$

Como caso particulares tenemos, si  $\widehat{A'B'C'}$  es el triángulo medial:

$$x' = -x + y + z, \quad y' = x - y + z, \quad z' = x + y - z.$$

Para el triángulo pedal (12.48) de un punto  $P(u : v : w)$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b^2u + S_Cv}{b^2(u+v+w)} & \frac{c^2u + S_Bw}{c^2(u+v+w)} \\ \frac{S_Cu + a^2v}{a^2(u+v+w)} & 0 & \frac{c^2v + S_Aw}{c^2(u+v+w)} \\ \frac{S_Bu + a^2w}{a^2(u+v+w)} & \frac{S_Av + b^2w}{b^2(u+v+w)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

En particular, para el triángulo órtico (12.49), formado por los pies de las alturas:

$$x' = a^2 S_A(-S_Ax + S_By + S_Cz), \quad y' = b^2 S_B(S_Ax - S_By + S_Cz), \quad z' = c^2 S_C(S_Ax + S_By - S_Cz).$$

Para el triángulo de contacto interior (12.50), pedal del incentro, con vértices en los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con los lados de  $\widehat{ABC}$ :

$$\begin{aligned} x' &= a(b+c-a)(-(b+c-a)x + (c+a-b)y + (a+b-c)z), \\ y' &= b(c+a-b)((b+c-a)x - (c+a-b)y + (a+b-c)z), \\ z' &= c(a+b-c)((b+c-a)x + (c+a-b)y - (a+b-c)z). \end{aligned}$$

Con estos cambios de coordenadas, que hemos expuesto, podemos poner unos ejemplos:

— Las coordenadas baricéntricas del incentro  $I(a : b : c)$  de  $\widehat{ABC}$ , respecto al triángulo de contacto interior son  $(a : b : c)$ , que no es el incentro de éste.

— Las coordenadas baricéntricas del baricentro  $G(1 : 1 : 1)$  de  $\widehat{ABC}$ , respecto al triángulo de contacto interior son <sup>(1)</sup>:

$$(a(b + c - a)(3a - b - c) : b(c + a - b)(a - 3b + c) : c(a + b - c)(a + b - 3c)).$$

— Las coordenadas baricéntricas del incentro  $I(a : b : c)$  de  $\widehat{ABC}$ , respecto al triángulo medial son  $(b + c - a : c + a - b : a + b - c)$ , que es el punto de Nagel (pág. 34) del triángulo medial, ya que las longitudes de los lados de  $\widehat{ABC}$  son el doble de las de su triángulo medial y podemos considerar  $a, b$  y  $c$ , como las longitudes del triángulo medial, dado que las coordenadas son homogéneas.

— Si un punto  $P$  tiene coordenadas baricéntricas  $(u : v : w)$  respecto a  $\widehat{ABC}$ , sus coordenadas baricéntricas respecto a su triángulo pedal son  $(a^2/u : b^2/v : c^2/w)$ ; es decir, tiene las mismas coordenadas que las del conjugado isogonal (14.60) de  $P$  respecto a  $\widehat{ABC}$ .

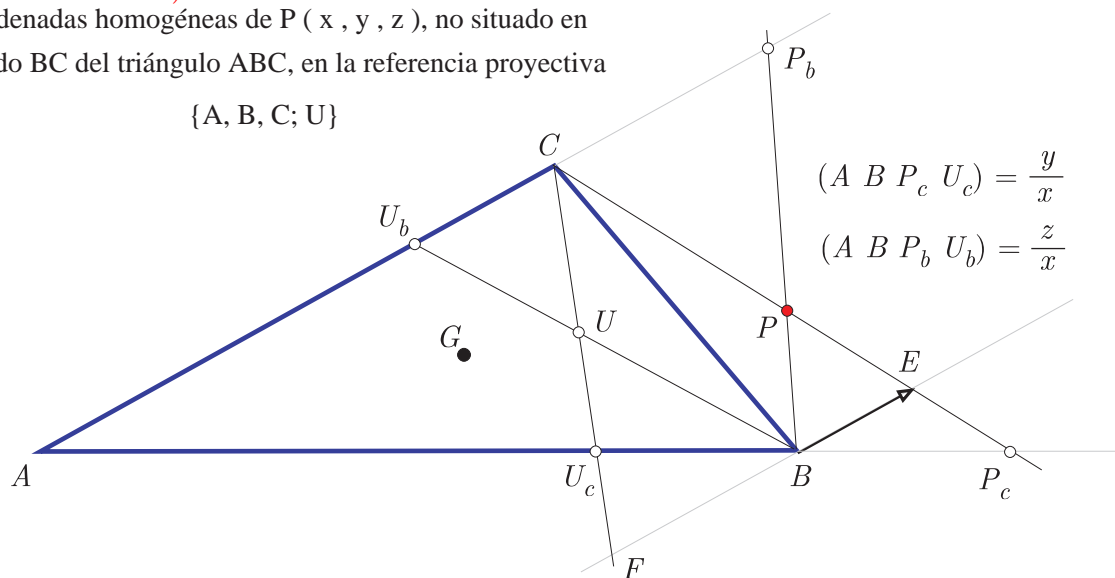
**8.6** Utilizamos ahora una interpretación de las coordenadas homogéneas de un punto respecto a una referencia proyectiva, en términos de razón doble, para determinar las coordenadas baricéntricas homogéneas de un punto del plano (no situado en los lados del triángulo de referencia) y, recíprocamente, ubicar un punto del que se conocen sus coordenadas homogéneas.

Dada una referencia proyectiva  $\{A, B, C; U\}$ , con  $U$  punto unidad, y un punto  $P$ , sean  $U_b = AC \cap BU$ ,  $U_c = AB \cap CU$ ,  $P_b = AC \cap CP$  y  $P_c = AB \cap BP$ , entonces se verifica que los valores de las razones dobles  $(A B P_c U_c) = y$ ,  $(A C P_b U_b) = z$ , dan las coordenadas homogéneas  $(1, y, z)$  de  $P$  respecto a  $\{A, B, C; U\}$ .

En particular, si la referencia proyectiva es  $\{A, B, C; G\}$ , con  $G$  el baricentro de  $\widehat{ABC}$ , por este procedimiento podemos obtener las coordenadas baricéntricas homogéneas de un punto  $P$ .

(Applet CabriJava)

Coordenadas homogéneas de  $P(x, y, z)$ , no situado en el lado  $BC$  del triángulo  $ABC$ , en la referencia proyectiva



La obtención gráfica de los valores de la razón doble de los cuatro puntos  $A, B, P_c, U_c$ , se puede hacer de la siguiente manera:

Se toma un punto  $D$  sobre una recta  $d$  que pase por  $A$  (se puede tomar  $d$  como el lado  $AC$  y  $D$  como  $C$ ) y se determinan los puntos de intersección  $E$  y  $F$  de la recta  $CP_c$  y  $CU_c$  con la recta paralela a  $d$  por  $B$ . Entonces la razón doble  $(A B P_c U_c)$  es la abscisa del punto  $F$  en la referencia afín  $\{B; \overrightarrow{BE}\}$ . Ya que:

$$(A B P_c U_c) = \frac{AP_c}{BP_c} : \frac{AU_c}{BU_c} = \frac{AC}{BE} : \frac{AC}{BF} = \frac{BF}{BE}.$$

<sup>(1)</sup> El punto con estas coordenadas baricéntricas, respecto a  $\widehat{ABC}$  es el  $X_{3158}$  en ETC, cociente ceviano  $X_1/X_9$ .

Inversamente, si lo que queremos es ubicar un punto en plano del que se conocen sus coordenadas homogéneas,  $P(x, y, z)$ , respecto a una referencia proyectiva  $\{A, B, C; U\}$ , debemos obtener los pies  $P_b$  y  $P_c$  de sus cevianas desde  $B$  y  $C$ , respectivamente. Así, por ejemplo, como se ha de verificar  $(ABP_cU_c) = y/x$ , para determinar  $P_c$ , procedemos de la forma siguiente:

Tomamos sobre una recta  $d$  por  $A$  un punto  $D$  (sea  $d \equiv AC$  y  $D = C$ ); sean el punto de intersección  $F$  de la recta  $CU_c$  con la recta que pasa por  $B$  y paralela a  $d$ , y el punto  $E$  (en la paralela a  $d$  por  $B$ ) tal que  $y/x$  es la abscisa de  $F$  en la referencia afín  $\{B; \overrightarrow{BE}\}$ . Entonces  $P_c$  es el punto de intersección de  $AB$  con  $DF$ .

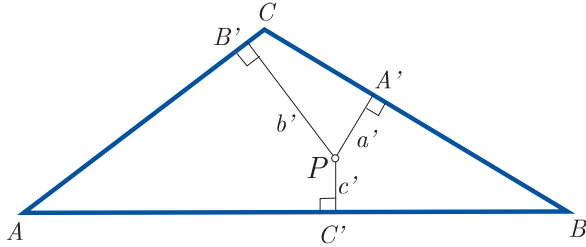
## 9 Coordenadas trilineales

**9.1** Dado un triángulo de referencia  $\widehat{ABC}$ , las coordenadas trilineales homogéneas en un punto  $P$ , con respecto a  $\widehat{ABC}$ , es la terna  $(\alpha : \beta : \gamma)$  de componentes proporcionales a las distancias  $a'$ ,  $b'$  y  $c'$  de  $P$  a los lados.

Para establecer la relación que existe entre las coordenadas baricéntricas  $(x : y : z)$  y trilineales  $(\alpha : \beta : \gamma)$  de un punto  $P$ , basta observar que, por (7.27),

$$(x : y : z) = (aa' : bb' : cc') = (a\alpha : b\beta : c\gamma),$$

$$(\alpha : \beta : \gamma) = (a' : b' : c') = \left( \frac{x}{a} : \frac{y}{b} : \frac{z}{c} \right).$$



Ejemplos: El incentro (pág. 10) equidista de los lados, luego sus coordenadas trilineales son  $(1 : 1 : 1)$  y por consiguiente sus baricéntricas son  $(a : b : c)$ .

El baricentro (pág. 9), centro de gravedad del triángulo, tiene de coordenadas baricéntricas  $(1 : 1 : 1)$  y por tanto sus coordenadas trilineales son  $(\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}) = (bc : ca : ab)$ .

Las coordenadas trilineales exactas  $(a', b', c')$  de  $P$  pueden ser calculadas <sup>(1)</sup> mediante las fórmulas ( $\Delta = \text{área}\widehat{ABC}$ ):

$$a' = \frac{2\alpha\Delta}{a\alpha + b\beta + c\gamma}, \quad b' = \frac{2\beta\Delta}{a\alpha + b\beta + c\gamma}, \quad c' = \frac{2\gamma\Delta}{a\alpha + b\beta + c\gamma}. \quad (9.30)$$

Ya que,  $2\Delta = aa' + bb' + cc'$  y si  $a' = k\alpha, b' = k\beta, c' = k\gamma$ , se tiene  $2\Delta = k(a\alpha + b\beta + c\gamma)$ .

**9.2** Si queremos darle un enfoque proyectivo a las coordenadas trilineales, de la misma forma que se hizo en el §8 con las coordenadas baricéntricas, sólo tenemos que considerar la referencia proyectiva  $\{A, B, C; I\}$ , cuyos puntos tienen coordenadas, en la referencia afín euclídea  $\{A; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  considerara allí,  $A(0, 0)$ ,  $B(c, 0)$ ,  $C(0, b)$  y  $I(r/\text{sen } A, r/\text{sen } A)$ .

En el plano proyectivo obtenido ampliando el plano afín con la recta del infinito y respecto a la referencia proyectiva  $\bar{\mathcal{R}}_a = \{A, B_\infty, C_\infty; U_a\}$  (el vértice  $A$ , los puntos del infinito de los ejes coordenados  $AB$  y  $AC$  y el punto unidad  $U_a(1, 1)$ ), se tiene que:

$$A(1, 0, 0), \quad B(1, c, 0), \quad C(1, 0, b), \quad I(\text{sen } A, r, r) \equiv (a + b + c, bc, bc).$$

<sup>(1)</sup> Estas coordenadas trilineales exactas son para un punto  $P$ , no situado en la recta del infinito ( $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$ ). Si  $P$  está en la recta del infinito y  $\alpha\beta\gamma \neq 0$ ,  $k := 1/\alpha + 1/\beta + 1/\gamma$ ; si  $P$  está en la recta del infinito y  $\alpha\beta\gamma = 0$ , entonces  $k := 1$

Tomando estos puntos como una nueva referencia proyectiva  $\mathcal{R} = \{A, B, C; I\}$ , con punto unidad en el incentro  $I$ , para lo cual debemos tomar las coordenadas de la forma:

$$A(a, 0, 0), \quad B(b, bc, 0), \quad C(c, 0, bc), \quad I(a + b + c, bc, bc),$$

se tienen las expresiones de cambio de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  y  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de un punto respecto a las referencias  $\bar{\mathcal{R}}_a$  y  $\mathcal{R}$ :

$$\lambda \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & bc & 0 \\ 0 & 0 & bc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \lambda \bar{x} &= a\alpha + b\beta + c\gamma & \mu\alpha &= bc\bar{x} - b\bar{y} - c\bar{z} \\ \lambda \bar{y} &= bc\beta & \mu\beta &= a\bar{y} \\ \lambda \bar{z} &= bc\gamma & \mu\gamma &= a\bar{z} \end{aligned}$$

La recta del infinito del plano en  $\bar{\mathcal{R}}_a$  es  $\bar{x} = 0$  y, por tanto,  $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ , en coordenadas trilineales. El baricentro,  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (3, c, b)$ , tiene coordenadas trilineales  $G(bc : ac : ab) = (1/a : 1/b : 1/c)$ .

El simétrico de un punto  $P(1, \bar{y}, \bar{z})$  respecto a la bisectriz  $AI$  es  $D(1, \bar{z}, \bar{y})$  y tiene de coordenadas trilineales  $D(** : \gamma : \beta)$ ; similarmente,  $E(\gamma : ** : \alpha)$  y  $F(\beta : \alpha : **)$  son los simétricos de  $P$  respecto a las bisectrices en  $B$  y  $C$ . Así, las rectas  $AD, BE$  y  $CF$  concurren en el punto, denominado conjugado isogonal (pág.55) de  $P$ , de coordenadas  $P^*(\beta\gamma : \gamma\alpha : \alpha\beta) = (1/\alpha : 1/\beta : 1/\gamma)$ . En particular, si  $P = G$ , su conjugado isogonal es el punto de Lemoine o simediano (pág.51), de coordenadas trilineales  $K(a : b : c)$ .

## 10 Puntos de la Enciclopedia de Kimberling

**10.1** A diferencia de los cuadrados y los círculos, los triángulos tienen muchos centros. Los antiguos griegos encontraron cuatro: incentro (pág.10), baricentro (pág.9), circuncentro (pág.31) y ortocentro (pág.32). Los puntos que ahora se conoce como centro de la circunferencia de los nueve puntos (pág.114), simediano (pág.51), punto de Gergonne (pág.34), puntos de Fermat (pág. 63) o punto de Feuerbach (pág.126), por nombrar algunos, se han añadido a la literatura. En la década de 1980, se observó que estos puntos especiales comparten algunas propiedades generales que ahora forman la base de una definición formal de centros de un triángulo.

Un centro de un triángulo es un punto cuyas coordenadas baricéntricas están definidas mediante una función de las variables  $a, b$  y  $c$  (que son las longitudes de los lados), de modo que se expresen en la forma:

$$(f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)),$$

donde  $f$  es homogénea en  $a, b, c$ , es decir, existe un número  $\rho$  real, no negativo, tal que

$$f(ta, tb, tc) = t^\rho f(a, b, c), \text{ para todo } (a, b, c) \text{ en el dominio de } f;$$

y simétrica en  $b$  y  $c$ , es decir,

$$f(a, b, c) = f(a, c, b).$$

En "The Encyclopedia of Triangle Centers" de Clark Kimberling,<sup>(1)</sup> denotada abreviadamente por "ETC", se les denominada "triangle center", se denota por  $X_n$  o bien por  $X(n)$  y en ella, el incentro y el baricentro son los dos primeros, es decir  $X_1$  y  $X_2$ , respectivamente.

<sup>(1)</sup><http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/index.html>

Para la localización de un centro en ETC, se utiliza su primera coordenada trilineal exacta (9.30), es decir, su distancia al lado  $BC$  en el triángulo  $\triangle ABC$ , de lados  $a = 6, b = 9, c = 13$ . Así, si su primera coordenada trilineal exacta es  $\frac{8\sqrt{35}}{15} \simeq 3.1552425509864618894$ , el centro correspondiente a este dato es el  $X_{966}(a^2 - 2a(b+c) - (b+c)^2 : \dots : \dots)$  (intersección de la recta que pasa por el baricentro y simediano, con la que pasa por el ortocentro y el punto intermedio,  $X_9$ ). Esto no quiere decir que no haya más centros con este mismo dato, como es el caso del centro de coordenadas baricéntricas  $((b+c-a)(b+c-11a) : (c+a-b)(c+a-11b) : (a+b-c)(a+b-11c))$ , que es el centro de la cónica que pasa por los pares de puntos situados en cada lado de  $\triangle ABC$ , por donde pasan los pares de rectas que unen cada vértice con los pies de las cevianas del punto de Nagel en el triángulo ceviano de éste (<http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2362.pdf#X966?>).

Supóngase ahora que  $(f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b))$  es un punto que satisface la condición de ser  $f$  homogénea en  $a, b, c$ , pero que  $|f(a, b, c)| \neq |f(a, c, b)|$ , entonces  $(f(a, c, b) : f(b, a, c) : f(c, b, a))$  y  $(f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b))$  se denominan puntos bicéntricos y juntos componen lo que se llama un par bicéntrico. Es el caso de los puntos de Brocard (pág.57):

$$\left(\frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2}\right), \quad \left(\frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2}\right).$$

Estos puntos, así como otros igualmente notables en la geometría del triángulo, no serán considerados como centros de un triángulo en este estudio.

**10.2** A continuación se da una lista de puntos notables del triángulo contenidos en este documento. Cuando es un centro y figura en ETC ponemos, en la primera columna, su número de orden y si no es un centro, un guión; cuando es un centro pero no nos consta que figure actualmente en ETC, lo indicamos con  $X_?$ . En algunos casos los representamos por una letra o un par de ellas, según la notación más frecuente usada en la literatura, así como le damos el nombre por el que se le suele conocer. De sus coordenadas sólo ponemos la primera, cuando es un centro, ya que las restantes se obtienen permutando cíclicamente la dada. En la última columna se indica una página donde figura.

$X_1$	$I$	Incentro	$a$	10
—	$I_a$	$A$ -exincentro	$(-a : b : c)$	34
—	$I_b$	$B$ -exincentro	$(a : -b : c)$	34
—	$I_c$	$C$ -exincentro	$(a : b : -c)$	34
$X_2$	$G$	Baricentro	1	9
$X_3$	$O$	Circuncentro	$a^2 S_A$	31
$X_4$	$H$	Ortocentro	$S_B S_C$	32
$X_5$	$N$	Centro circunferencia de Euler	$S^2 + S_B S_C$	114
$X_6$	$K$	Simediano	$a^2$	51
$X_7$	$G_e$	Punto de Gergonne	$\frac{1}{s-a}$	34
$X_8$	$N_a$	Punto de Nagel	$s - a$	34
$X_9$	$M_t$	Punto intermedio "Mittenpunkt"	$a(-a + b + c)$	37

$X_{10}$	$S_p$	Punto de Spieker	$b + c$	104
$X_{11}$	$F$	Punto de Feuerbach	$(-a + b + c)(b - c)^2$	126
$X_{12}$			$\frac{(b + c)^2}{s - a}$	132
$X_{13}$ $X_{14}$		Puntos de Fermat	$\frac{1}{\sqrt{3}S_A \pm S}$	63
$X_{15}$ $X_{16}$		Puntos isodinámicos	$a^2(\sqrt{3}S_A \pm S)$	75
$X_{17}$ $X_{18}$		Puntos de Napoleón	$\frac{1}{S_A \pm \sqrt{3}S}$	64
$X_7$			$\frac{S + \sqrt{3}S_A}{\sqrt{3}S - S_A}$	75
$X_{20}$	$L$	Punto de De Longschamps	$S_B S_C - S_A S_B - S_A S_C$	36
$X_{21}$		Punto de Schiffler	$\frac{a(b + c - a)}{b + c}$	33
$X_{30}$		Punto del infinito de la recta de Euler	$2a^4 - (b^2 + c^2)a^2 - (b^2 - c^2)^2$	32
$X_{32}$		$J_{\omega-A}$	$a^4$	79
$X_{35}$			$a^2(b^2 + c^2 - a^2 + bc)$	80
$X_{39}$		Punto medio de los de Brocard	$a^2(b^2 + c^2)$	58
$X_{40}$	$B_v$	Punto de Bevan	$-\frac{a}{s - a} + \frac{b}{s - b} + \frac{c}{s - c}$	47
$X_{54}$		Punto de Kosnita	$a^2/(S^2 + S_B S_C)$	107
$X_{57}$			$a(a + b - c)(a - b + c)$	37
$X_{58}$			$a^2/(b + c)$	107
$X_{61}$ $X_{62}$		Conjugados isogonales de los puntos de Napoleón	$a^2(S_A \pm \sqrt{3}S)$	77
$X_{69}$		Conjugado isotómico del ortocentro	$S_A$	102
$X_{75}$		Conjugado isotómico del incentro	$\frac{1}{a}$	104
—	$\Omega_1$	Primer punto de Brocard	$\left(\frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2}\right)$	57
—	$\Omega_2$	Segundo punto de Brocard	$\left(\frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2}\right)$	58



$X_{76}$		Tercer punto de Brocard $K(-\omega)$	$\frac{1}{a^2}$	66
—		Puntos de Jerabek	$\left(\frac{1}{b} : \frac{1}{c} : \frac{1}{a}\right), \left(\frac{1}{c} : \frac{1}{a} : \frac{1}{b}\right)$	59
$X_{79}$		Punto de Gray	$1/(b^2 + c^2 - a^2 + bc)$	80
$X_{80}$			$1/(bc - 2S_A)$	35
$X_{83}$		$K(\omega)$	$1/(b^2 + c^2)$	67
$X_{84}$		Conjugado isogonal del punto de Bevan	$\frac{a}{a^3 + (b+c)(a(a-b-c) - (b-c)^2)}$	98
$X_{85}$			$\frac{1}{a(-a+b+c)}$	44
$X_{90}$		Centro de perspectividad de Jacobi, $J(4, 0)$	$\frac{a}{a^3 + (b+c)(a^2 - (b-c)^2) - a(b^2 + c^2)}$	97
$X_{98}$		Punto de Tarry $K(\omega \pm \pi/2)$	$\frac{1}{S_A S_\omega - S^2}$	68
$X_{104}$		Cuarto punto de intersección de la circunferencia circunscrita y la hipérbola de Feuerbach	$\frac{a}{(a+b-c)(a-b+c)(b+c) - 2abc}$	97
$X_{115}$		Centro de la hipérbola de Kiepert	$(b^2 - c^2)^2$	62
$X_{141}$		Complemento del simediano	$b^2 + c^2$	79
$X_{174}$		"Yff center of congruence"	$\sqrt{\frac{a}{-a+b+c}}$	83
$X_{182}$		Punto medio de $OK$	$a^2(a^2 S_A + b^2 c^2)$	119
$X_{188}$		Segundo punto del arco mitad del triángulo anticomplementario	$\frac{1}{\sqrt{bc(bc - S_A)}}$	87
$X_{192}$	$P_i$	Punto de paralelas iguales	$-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$	5
$X_{194}$			$a^2 b^2 - b^2 c^2 + c^2 a^2$	67
$X_{230}$			$2a^4 - a^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2$	121
$X_{262}$		$K(-\omega \pm \frac{\pi}{2})$	$1/(S_A S_\omega + S^2)$	69
$X_{312}$			$bc(-a + b + c)$	45

$X_{371}$		Punto de Kenmotu	$a^2(S_A + S)$	77
$X_{372}$			$a^2(S_A - S)$	77
$X_{381}$			$4S_B S_C + a^2 S_A$	118
$X_{384}$		$\hat{J}_\omega$	$a^4 + b^2 c^2$	79
$X_{485}$ $X_{486}$		Puntos de Vecten	$1/(S_A \pm S)$	64
$X_{512}$		Infinito de $\Omega_1 \Omega_2$	$a^2(b^2 - c^2)$	58
$X_{514}$			$(b - c : c - a : a - b)$	129
$X_{650}$			$a(b - c)(b + c - a)$	101
$X_{903}$			$(a + b - 2c)(a - 2b + c)$	130
$X_{943}$			$\frac{a^2}{(-a+b+c)(2a^3+a^2(b+c)+(b-c)^2(b+c))}$	97
$X_{951}$			$\frac{a}{2abc+(b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$	40
$X_?$			$\frac{-a+b+c}{a^2+b^2+c^2-2a(b+c)}$	38
$X_?$			$\frac{a(-a+b+c)}{a^2(b+c)-2a(b^2+bc+c^2)+(b+c)^3}$	39
$X_?$			$\frac{a}{a^3(b+c)+a^2(b^2+4bc+c^2)-a(b^3+b^2c+bc^2+c^3)-(b^2-c^2)^2}$	41
$X_?$			$\frac{a^2}{-2a^5+2a^3(b-c)^2-a^4(b+c)+4a^2bc(b+c)+(b-c)^2(b+c)^3}$	43
$X_?$			$a(b - c)(-a + b + c)^2((b - c)^2 - a((b + c)$	45
$X_?$			$a(a - b - c)(b - c)((b - c)^2 + a(b + c))$	45
$X_{1123}$		Punto de Paasche	$1/(bc + S)$	90
$X_{1127}$		Primer punto de De Villiers	$1/\left(bc + \sqrt{bc(-a + b + c)(a + b + c)}\right)$	84
$X_{1128}$		2º pto. De Villiers	$1/\left(bc + \sqrt{bc(a + b - c)(a - b + c)}\right)$	87
$X_{1130}$		Punto de Stevanovic	$a^2(bc + \sqrt{b(a - b + c)}\sqrt{c(a + b - c)})$	107
$X_{1131}$ $X_{1132}$		$K(\pm \arctag 2)$	$1/(2S_A \pm S)$	64
$X_{1143}$		Segundo punto de Malfatti-Rabinowitz	$1/(\sqrt{2bcS_{A/2}} + S_{A/2})$	85
$X_?$			$1/(S_A + S_{A/2} + \sqrt{2bcS_{A/2}})$	85
$X_?$			$1/\left(bc - S_A + \sqrt{2bc(bc - S_A)}\right)$	88
$X_?$			$1/\left(bc - 2S_A + \sqrt{2bc(bc - S_A)}\right)$	89
$X_?$			$\sqrt{bc(bc - S_A)}$	87
$X_{1151}$ $X_{1152}$		$J_{\mp \arctag 2-A}$	$a^2(2S_A \pm S)$	78
$X_?$		$\hat{J}_{\arctag 2}$	$-11a^4 + 6(b^2 + c^2)a^2 + 5(b^2 - c^2)^2$	78

$X_{1155}$		Punto de Schröder	$a((b-c)^2 + a(b+c-2a))$	119
$X_{1156}$		Conjugado isogonal del punto de Schröder	$\frac{a}{a(-2a+b+c) + (b-c)^2}$	97
$X_{1320}$		Centro de perspectividad de Jacobi, $J(-2, 4)$	$\frac{a(b+c-a)}{b+c-2a}$	98
$X_{1327}$ $X_{1328}$		$K(\pm \arctag 3)$	$1/(3S_A \pm S)$	65
$X_?$		$J_{\pm \arctag 3-A}$	$a^2(3S_A \pm S)$	78
$X_?$		$\hat{J}_{\arctag 3}$	$5S_B S_C - 4a^2 S_A$	78
$X_{1336}$			$1/(bc - S)$	91
$X_{1659}$		Punto de Yiu-Paasche	$1/(S + S_A + bc)$	93
$X_{1770}$			$a^2 S_A - 2S_B S_C - a(bS_B + cS_C)$	81
$X_?$			$1/(S - S_A + bc)$	91
$X_?$			$1/(S + S_A - bc)$	92
$X_?$			$1/(-S + S_A + bc)$	94
$X_{2987}$			$\frac{a^2}{2a^4 - a^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2}$	121
$X_{3158}$			$a(b+c-a)(3a-b-c)$	20
$X_?$			$a(b-c)(b+c-a)(a-2b+c)(a+b-2c)$	130
$X_?$			$a(abc + a(S_A + S_\omega) - b(S_B + S_\omega) - c(S_C + S_\omega))$	68
$X_?$		Un centro de perspectividad de Jacobi	$\frac{b+c-a}{(b+c-a)(b^2+c^2-a^2) - abc}$	98
$X_?$		Un centro de perspectividad de Jacobi	$\frac{b+c-a}{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + bc}$	98
$X_?$		Centro de perspectividad de Jacobi, $J(-2, 0)$	$\frac{a}{(a-b-c)(a(2a+b+c) - (b-c)^2)}$	97
$X_?$		Centro de perspectividad de Jacobi, $J(2, -1)$	$\frac{a}{(a-b+c)(a+b-c)(b+c) + abc}$	98
$X_?$		Centro de perspectividad de Jacobi, $J(4, 1)$	$\frac{a}{a^3 + a^2(b+c) - (b-c)^2(b+c) - a(b^2 + bc + c^2)}$	98

$X_7$		Centro de perspecti- vidad de Jacobi, $J(6, \pm 2)$	$\frac{a}{2a^3 + a^2(b+c) - (b-c)^2(b+c) - 2a(b^2 \pm bc + c^2)}$	98
-------	--	---	---	----

## 11 Producto escalar. Distancia entre puntos

**11.1** Primeramente, vamos a deducir la expresión del producto escalar, utilizando los vectores de posición de los vértices de  $\widehat{ABC}$ , respecto a un origen cualquiera. Cualquier vector  $\vec{v}$  de su plano se expresa de forma única respecto a la referencia  $\{A; \vec{AB}, \vec{AC}\}$ ; es decir, existe unos únicos escalares,  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ , tales que

$$\vec{v} = \mu \vec{AB} + \nu \vec{AC}, \quad \text{ó} \quad \vec{v} = \mu(\vec{b} - \vec{a}) + \nu(\vec{c} - \vec{a}).$$

Si se pone  $\lambda = -(\mu + \nu)$ , se tiene

$$\vec{v} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}, \quad \lambda + \mu + \nu = 0. \tag{11.31}$$

A los números  $\lambda, \mu, \nu$  (unívocamente determinados) se les denomina componentes del vector  $\vec{v}$ , respecto al triángulo  $\widehat{ABC}$ , y se escribe  $\vec{v} = (\lambda, \mu, \nu)$ .

Dados dos puntos  $P_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2$ , con  $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2 = 1$ , como  $\vec{p}_i = x_i \vec{a} + y_i \vec{b} + z_i \vec{c}$ , se tiene

$$\vec{P_1P_2} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = (x_2 - x_1) \vec{a} + (y_2 - y_1) \vec{b} + (z_2 - z_1) \vec{c},$$

con lo que, las componentes de  $\vec{P_1P_2}$ , respecto a  $\widehat{ABC}$ , son

$$\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \tag{11.32}$$

Se concluye que: "Las coordenadas baricéntricas homogéneas del punto del infinito de una recta (5.13) son proporcionales a las componentes, respecto a  $\widehat{ABC}$ , de un vector paralelo a dicha recta".

En particular,

$$\vec{BC} = (0, -1, 1), \quad \vec{CA} = (1, 0, -1), \quad \vec{AB} = (-1, 1, 0). \tag{11.33}$$

Si  $P_i(x_i : y_i : z_i)$ ,  $i = 1, 2$ , vienen dados en coordenadas baricéntricas homogéneas, entonces

$$\vec{P_1P_2} = \left( \frac{(y_1 + z_1)x_2 - (y_2 + z_2)x_1}{(x_1 + y_1 + z_1)(x_2 + y_2 + z_2)}, \frac{(x_1 + z_1)y_2 - (x_2 + z_2)y_1}{(x_1 + y_1 + z_1)(x_2 + y_2 + z_2)}, \frac{(x_1 + y_1)z_2 - (x_2 + y_2)z_1}{(x_1 + y_1 + z_1)(x_2 + y_2 + z_2)} \right). \tag{11.34}$$

— . —

Si  $\vec{v}_i = (\lambda_i, \mu_i, \nu_i)$ ,  $i = 1, 2$ , son las componentes de dos vectores respecto al triángulo  $\widehat{ABC}$ , se tiene que su producto escalar vale

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = S_A \lambda_1 \lambda_2 + S_B \mu_1 \mu_2 + S_C \nu_1 \nu_2. \tag{11.35}$$

En efecto, el que  $(\lambda_i, \mu_i, \nu_i)$  sean las componentes de los vectores  $\vec{v}_i$ ,  $i = 1, 2$ , respecto a  $\widehat{ABC}$ , significa que  $\lambda_i + \mu_i + \nu_i = 0$ , y que  $\vec{v}_i = \mu_i \vec{AB} + \nu_i \vec{AC}$ , luego:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 &= \left( \mu_1 \vec{AB} + \nu_1 \vec{AC} \right) \cdot \left( \mu_2 \vec{AB} + \nu_2 \vec{AC} \right) = \\
&= c^2 \mu_1 \mu_2 + bc(\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1) \cos A + b^2 \nu_1 \nu_2 = \\
&= (S_A + S_B) \mu_1 \mu_2 + S_A(\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1) + (S_A + S_C) \nu_1 \nu_2 = \\
&= S_A(\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1 + \nu_1 \nu_2) + S_B \mu_1 \mu_2 + S_C \nu_1 \nu_2 = \\
&= S_A(\mu_1 + \nu_1)(\mu_2 + \nu_2) + S_B \mu_1 \mu_2 + S_C \nu_1 \nu_2 = \\
&= S_A \lambda_1 \lambda_2 + S_B \mu_1 \mu_2 + S_C \nu_1 \nu_2.
\end{aligned}$$

□

**11.2** En particular, el módulo de un vector  $\vec{v} = (\lambda, \mu, \nu)$  está dado por

$$\|\vec{v}\|^2 = S_A \lambda^2 + S_B \mu^2 + S_C \nu^2. \quad (11.36)$$

El ángulo entre los vectores  $\vec{v}_i = (\lambda_i, \mu_i, \nu_i)$ ,  $\lambda_i + \mu_i + \nu_i = 0$ , ( $i = 1, 2$ ), viene dado, como  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\| \cos \theta$ , por

$$\cos \theta = \frac{S_A \lambda_1 \lambda_2 + S_B \mu_1 \mu_2 + S_C \nu_1 \nu_2}{\sqrt{S_A \lambda_1^2 + S_B \mu_1^2 + S_C \nu_1^2} \sqrt{S_A \lambda_2^2 + S_B \mu_2^2 + S_C \nu_2^2}}. \quad (11.37)$$

Por ejemplo, el ángulo entre los lados  $AB$  y  $AC$  del triángulo de referencia se calcula usando (11.33),  $\vec{AB} = (-1, 1, 0)$  y  $\vec{AC} = (-1, 0, 1)$ , con lo que

$$\cos \theta = \frac{S_A}{\sqrt{S_A + S_B} \sqrt{S_A + S_C}} = \frac{S \cotag A}{cb} = \frac{S \cos A}{cb \sen A} = \cos A.$$

**11.3** Como, por (11.32),  $\overrightarrow{P_1 P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$  es el vector determinado por los puntos  $P_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $x_i + y_i + z_i = 1$ ,  $i = 1, 2$ , la distancia entre ellos está dada, usando (11.36), por

$$P_1 P_2^2 = S_A(x_2 - x_1)^2 + S_B(y_2 - y_1)^2 + S_C(z_2 - z_1)^2. \quad (11.38)$$

Si  $P_i(x_i : y_i : z_i)$ ,  $i = 1, 2$  están dados en coordenadas baricéntricas homogéneas, la distancia entre  $P_1$  y  $P_2$  está dada por el módulo del vector  $\overrightarrow{P_1 P_2}$ :

$$P_1 P_2^2 = \frac{1}{(x_1 + y_1 + z_1)^2 (x_2 + y_2 + z_2)^2} \left( S_A((y_2 + z_2)x_1 - x_2(y_1 + z_1))^2 + S_B((z_2 + x_2)y_1 - y_2(z_1 + x_1))^2 + S_C((x_2 + y_2)z_1 - z_2(x_1 + y_1))^2 \right). \quad (11.39)$$

Pues, basta con dividir las coordenadas de  $P_1$  y  $P_2$  por la suma de sus componentes y utilizar la fórmula (11.38), que da la distancia entre los puntos expresados en coordenadas baricéntricas absolutas.

En particular, las distancias de un punto  $P(x : y : z)$  a los vértices del triángulo de referencia vienen dadas por las expresiones:

$$AP^2 = \frac{S_A(1-x)^2 + S_B y^2 + S_C z^2}{(x+y+z)^2} = \frac{c^2 y^2 + 2S_A y z + b^2 z^2}{(x+y+z)^2},$$

$$BP^2 = \frac{S_A x^2 + S_B(1-y)^2 + S_C z^2}{(x+y+z)^2} = \frac{a^2 z^2 + 2S_B z x + c^2 x^2}{(x+y+z)^2}, \quad (11.40)$$

$$AP^2 = \frac{S_A x^2 + S_B y^2 + S_C(1-z)^2}{(x+y+z)^2} = \frac{b^2 x^2 + 2S_C x y + a^2 y^2}{(x+y+z)^2}.$$

**11.4** Por ejemplo, para encontrar (de nuevo) las coordenadas del circuncentro  $O$  de  $\widehat{ABC}$ , que equidista de los vértices, se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$S_A(1-x)^2 + S_B y^2 + S_C z^2 = S_A x^2 + S_B(1-y)^2 + S_C z^2 = S_A x^2 + S_B y^2 + S_C(1-z)^2,$$

lo que equivale al resolver al sistema:

$$-2S_A x + 2S_B y = S_B - S_A, \quad -2S_A x + 2S_C z = S_C - S_A, \quad x + y + z = 1.$$

Obteniéndose, como coordenadas baricéntricas, absolutas y homogéneas, del circuncentro las ya obtenidas en la página 31:

$$O \left( \frac{a^2 S_A}{2S}, \frac{b^2 S_B}{2S}, \frac{c^2 S_C}{2S} \right), \quad O(a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C).$$

La distancia de un vértice al circuncentro es el radio  $R$  de la circunferencia circunscrita, por lo que  $R^2$  (cuadrado de la distancia de  $A$  a  $O$ ) es

$$R^2 = \frac{S_A(b^2 S_B + c^2 S_C)^2 + S_B(-b^2 S_B)^2 + S_C(-c^2 S_C)^2}{a^2 S_A + b^2 S_B + c^2 S_C}.$$

Que evaluando, usando (2.2), nos da la expresión del radio de la circunferencia circunscrita, ya expuesto en (2.5):

$$R^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}.$$

## 12 Perpendicularidad

**12.1** Según (11.37), dos vectores  $\vec{v}_i = (\lambda_i, \mu_i, \nu_i)$  son perpendiculares ( $\theta = \pi/2$ ) si y sólo si

$$S_A \lambda_1 \lambda_2 + S_B \mu_1 \mu_2 + S_C \nu_1 \nu_2 = 0. \quad (12.41)$$

Utilizando este hecho, se puede caracterizar cuando dos rectas son perpendiculares. Los vectores paralelos a las rectas  $p_i x + q_i y + r_i z = 0$  ( $i = 1, 2$ ) tienen componentes (respecto al triángulo de referencia) proporcionales a las de sus puntos del infinito (5.21); es decir,  $\vec{v}_i = (q_i - r_i, r_i - p_i, p_i - q_i)$ . Luego, las rectas son perpendiculares si y sólo si

$$S_A(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + S_B(r_1 - p_1)(r_2 - p_2) + S_C(p_1 - q_1)(p_2 - q_2) = 0. \quad (12.42)$$

Y el punto del infinito de una recta perpendicular a otra recta de ecuación  $px + qy + rz = 0$ , se determina resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$S_A(q-r)x + S_B(r-p)y + S_C(p-q)z = 0, \quad x + y + z = 0,$$

y resulta,

$$(S_B(r-p) - S_C(p-q) : S_C(p-q) - S_A(q-r) : S_A(q-r) - S_C(r-p)),$$

o bien,

$$(pa^2 - qS_C - rS_B : qb^2 - rS_A - pS_C : rc^2 - pS_B - qS_A). \quad (12.43)$$

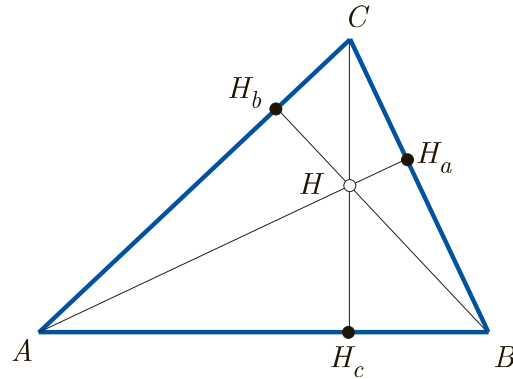
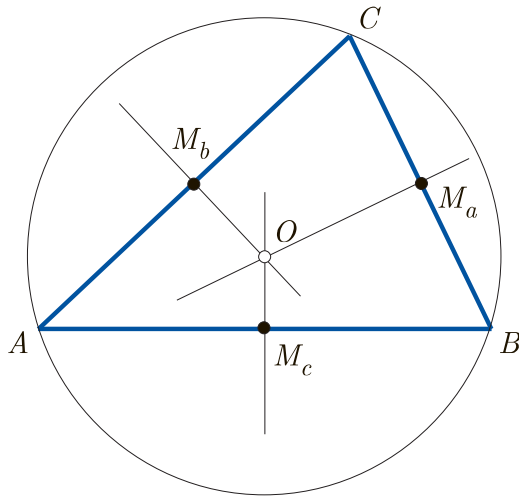
Se puede expresar las coordenadas del punto del infinito de la recta perpendicular a la que pasa por dos puntos  $P_i(x_i : y_i : z_i)$ ,  $i = 1, 2$  ( $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2$ ), sin necesidad de hallar la ecuación de la recta que estos determinan, ya que el punto del infinito (5.13) de ésta es  $(x_2 - x_1 : y_2 - y_1 : z_2 - z_1)$ ,

$$(S_B(y_2 - y_1) - S_C(z_2 - z_1) : S_C(z_2 - z_1) - S_A(x_2 - x_1) : S_A(x_2 - x_1) - S_B(y_2 - y_1)). \quad (12.44)$$

**12.2** Los puntos del infinito de las perpendiculares a cada uno de los lados  $BC$  ( $x = 0$ ),  $CA$  ( $y = 0$ ) y  $AB$  ( $z = 0$ ) son, respectivamente,

$$(-a^2 : S_C : S_B), \quad (S_C : -b^2 : S_A), \quad (S_B : S_A : -c^2). \quad (12.45)$$

Utilizamos esto para determinar las coordenadas del circuncentro y ortocentro de  $\widehat{ABC}$ :



El circuncentro es el punto de corte de las mediatrices a los lados (perpendiculares a ellos en sus puntos medios); la mediatriz a  $BC$  contiene a los puntos  $M_a(0 : 1 : 1)$  y  $(-a^2 : S_C : S_B)$ . Similarmente con las otras mediatrices, por lo que las ecuaciones de las mediatrices a  $BC$ ,  $CA$ , y  $AB$  son, respectivamente:

$$(S_B - S_C)x - a^2y + a^2z = 0, \quad b^2x + (S_C - S_A)y - b^2z = 0, \quad -c^2x + c^2y + (S_A - S_B)z = 0. \quad (12.46)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, resulta que las coordenadas del circuncentro  $O$  ( $X_3$  de ETC) son

$$(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C) = (\text{sen } 2A : \text{sen } 2B : \text{sen } 2C).$$

La expresión en términos de los ángulos surge de que  $(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C) = (\text{sen}^2 A \cotag A : \text{sen}^2 B \cotag B : \text{sen}^2 C \cotag C)$ .

El ortocentro es el punto de concurrencia de las alturas, desde  $A$ ,  $B$  y  $C$ :

$$AH_a : S_By - S_Cz = 0, \quad BH_b : -S_Ax + S_Cz = 0, \quad CH_c : S_Ax - S_By = 0. \quad (12.47)$$

Con lo que el ortocentro  $H$  ( $X_4$  de ETC) tiene por coordenadas

$$(S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B) = \left( \frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C} \right) = (\text{tag } A : \text{tag } B : \text{tag } C).$$

**12.3** El baricentro, el circuncentro y el ortocentro de un triángulo son colineales. La recta que los contiene se llama recta de Euler.

Podemos comprobar ese hecho, tomando el determinante formado por sus coordenadas, en el que restando la primera columna a la segunda y la tercera y, luego, utilizando la penúltima relación de (2.4), tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 S_A & b^2 S_B & c^2 S_C \\ S_B S_C & S_A S_C & S_A S_B \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 S_A & b^2 S_B - a^2 S_A & c^2 S_C - a^2 S_A \\ S_B S_C & S_A S_C - S_B S_C & S_A S_B - S_B S_C \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 S_A & -S_A S_C + S_B S_C & -S_A S_B + S_B S_C \\ S_B S_C & S_A S_C - S_B S_C & S_A S_B - S_B S_C \end{vmatrix} = 0.$$

Se verifica además que  $HG/GO = 2/1$ , pues como las componentes de las coordenadas de  $H(S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B)$  suman  $S^2$  y las de  $O(a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C)$  suman  $2S^2$ , se tiene que por (5.12):

$$S^2(S_B S_C : S_A S_C : S_A S_B) + 2S^2(a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C) = 2S^2(a^2 S_A + S_B S_C : b^2 S_B + S_C S_A : c^2 S_C + S_A S_B) = 2S^4(1 : 1 : 1).$$

La ecuación de la recta de Euler es  $S_A(S_B - S_C)x + S_B(S_C - S_A)y + S_C(S_A - S_B)z = 0$ . Y su punto del infinito ( $X_{30}$  en ETC) es:

$$(S_A S_B + S_A S_C - 2S_B S_C : S_B S_C + S_B S_A - 2S_C S_A : S_C S_A + S_C S_B - 2S_A S_B) = (2a^4 - (b^2 + c^2)a^2 - (b^2 - c^2)^2 : \dots : \dots).$$

Las rectas de Euler de los triángulos  $\widehat{ABC}$ ,  $\widehat{IBC}$ ,  $\widehat{AIC}$ ,  $\widehat{ABI}$ , son concurrentes.

El baricentro del triángulo  $ABI$  es  $(1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (a/(a+b+c), b/(a+b+c), c/(a+b+c)) = (2a + b + c : a + 2b + c : c)$ .

Para determinar su ortocentro, determinemos dos de sus rectas que contienen alturas. Una es la recta que pasa por  $I(a : b : c)$  y por el punto de del infinito  $(S_B : S_A : -c^2)$  de la perpendicular a  $AB$ , su ecuación es  $(cS_A + bc^2)x + (-cS_B - ac^2)y + (-aS_A + bS_B)z = 0$ . Otra es la que pasa por  $A(1 : 0 : 0)$  y por el punto del infinito  $(a+c)S_B + cS_C : aS_A - cS_C : -aS_A - (a+c)S_B$  de la perpendicular a la recta  $BI$  (de coeficientes,  $(c, 0, -a)$ ); por lo que su ecuación es  $(cS_B + ac^2)y + (aS_A - cS_C)z = 0$ . La intersección de estas alturas es el ortocentro de  $\widehat{ABI}$ :

$$((cS_B + ac^2))(bS_B - cS_C) : (cS_A + bc^2)(aS_A - cS_C) : -(cS_B + ac^2)(cS_A + bc^2) = (b - c : a - c : c).$$

Por lo que la recta de Euler de  $\widehat{ABI}$  tiene por ecuación

$$c(b + c)x - c(a + c)y + (a^2 - b^2)z = 0.$$



Similarmente, se obtienen las rectas de Euler de los triángulos  $\widehat{BCI}$  y  $\widehat{CAI}$ , las cuales son respectivamente,

$$(b^2 - c^2)x + a(c + a)y - a(b + a)z = 0, \quad -b(c + b)x + (c^2 - a^2)y + b(a + b)z = 0.$$

Estas tres rectas se cortan en el punto, que también está en la recta de Euler de  $\widehat{ABC}$ :

$$\left( \frac{a(b + c - a)}{b + c} : \frac{b(c + a - b)}{c + a} : \frac{c(a + b - c)}{a + b} \right).$$

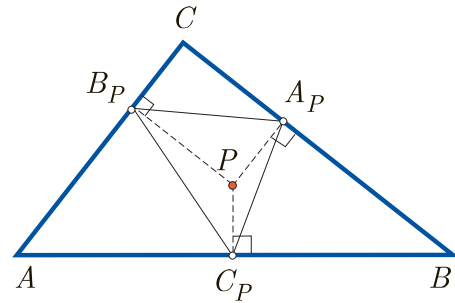
Se trata del punto de Schiffler,  $X_{21}$  en ETC.

**12.4** Dado un punto  $P(u : v : w)$ , vamos a determinar los pies de las perpendiculares por  $P$  a los lados del triángulo de referencia. Las rectas que pasan por  $P$  y por los puntos del infinito de las perpendiculares a los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $CA$ , dados por (12.45), cortan a éstos en puntos cuyas coordenadas satisfacen, respectivamente, a

$$\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ u & v & w \\ -a^2 & S_C & S_B \end{vmatrix} = -(a^2w + uS_B)y + (a^2v + uS_C)z = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & z \\ u & v & w \\ S_C & -b^2 & S_A \end{vmatrix} = -(b^2u + vS_C)z + (b^2w + vS_A)x = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ u & v & w \\ S_A & S_B & -c^2 \end{vmatrix} = -(c^2v + wS_A)x + (c^2u + wS_B)y = 0.$$



De donde, se obtiene que los pies de las perpendiculares por  $P$  a los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  (pedales de  $P$ ) son

$$\begin{aligned} A_P(0 : a^2v + uS_C : a^2w + uS_B), \\ B_P(b^2u + vS_C : 0 : b^2w + vS_A), \\ C_P(c^2u + wS_B : c^2v + wS_A : 0). \end{aligned} \tag{12.48}$$

Al triángulo  $A_P B_P C_P$  se le conoce como triángulo pedal de  $P$ . El triángulo pedal del ortocentro  $H(S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B)$  se llama triángulo órtico (que es el triángulo ceviano de  $H$ ) y tiene por vértices:

$$H_a(0 : S^2 S_C : S^2 S_B) = (0 : S_C : S_B), \quad H_b(S_C : 0 : S_A), \quad H_c(S_B : S_A : 0). \tag{12.49}$$

El triángulo pedal del circuncentro  $O(a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C)$ , tiene por vértices los puntos

$$(0 : a^2 S^2 : a^2 S^2) = (0 : 1 : 1), \quad (b^2 S^2 : 0 : b^2 S^2) = (1 : 0 : 1), \quad (c^2 S^2 : c^2 S^2 : 0) = (1 : 1 : 0),$$

que son los puntos medios de los lados, por lo que forman el triángulo medial.

Cuatro ejemplos más de triángulos pedales son los del incentro y de los exincentros, que podemos determinar utilizando este método (en las páginas 93 y 90 se da otro tratamiento):

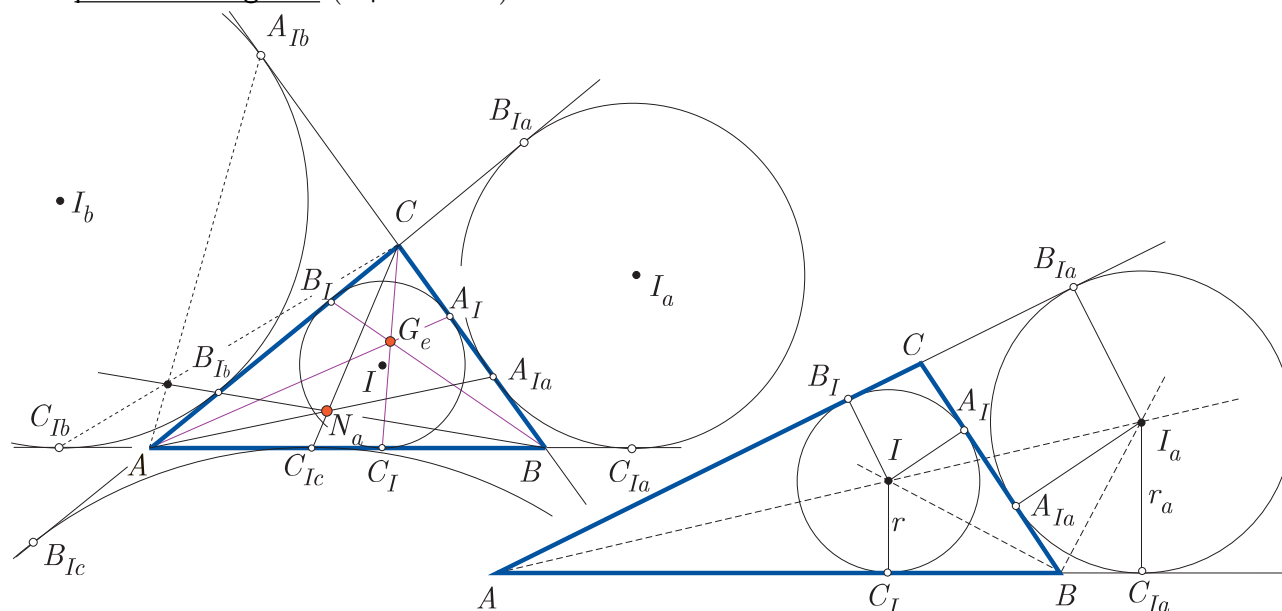
Los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados son los pies de las perpendiculares desde el incentro  $I(a : b : c)$ , los cuales forman el triángulo de contacto interior, cuyos vértices son, usando (12.48) y (2.4):

$$A_I(0 : ab + S_C : ac + S_B) = (0 : s - c : s - b), \quad B_I(s - c : 0 : s - a), \quad C_I(s - b : s - a : 0). \quad (12.50)$$

Que se pueden poner de la forma:

$$A_I \left( 0 : \frac{1}{s - b} : \frac{1}{s - c} \right), \quad B_I \left( \frac{1}{s - a} : 0 : \frac{1}{s - c} \right), \quad C_I \left( \frac{1}{s - a} : \frac{1}{s - b} : 0 \right).$$

Con lo que, por (6.25), son los pies de las cevianas del punto  $G_e \left( \frac{1}{s - a} : \frac{1}{s - b} : \frac{1}{s - c} \right)$ , conocido como punto de Gergonne ( $X_7$  de ETC).



El centro de la circunferencia exinscrita  $I_a(r_a)$ , relativa al vértice  $A$ , es la intersección de la bisectriz interior en  $A$ , de ecuación (6.24)  $-cy + bz = 0$ , con la perpendicular,  $cx + az = 0$ , a la bisectriz interior en  $B$  (bisectriz exterior en  $B$ ). Con lo que el centro de dicha circunferencia y (similarmemente) de las exinscritas relativas a los vértices  $B$  y  $C$ , que forman el triángulo excentral, son (exincentros):

$$I_a(-a : b : c), \quad I_b(a : -b : c), \quad I_c(a : b : -c). \quad (12.51)$$

Y los puntos de tangencia de estas circunferencias con los lados (pies de las perpendiculares desde sus centros) son

$$\begin{aligned} A_{I_a}(0 : s - b, s - c), & \quad B_{I_a}(s - b : 0 : -s), & \quad C_{I_a}(s - c : -s : 0), \\ A_{I_b}(0 : s - a : -s), & \quad B_{I_b}(s - a : 0 : s - c), & \quad C_{I_b}(-s : s - c : 0) \\ A_{I_c}(0 : -s : s - a), & \quad B_{I_c}(-s : 0 : s - b), & \quad C_{I_c}(s - a : s - b : 0). \end{aligned} \quad (12.52)$$

Los puntos  $A_{I_a}(0 : s - b, s - c)$ ,  $B_{I_b}(s - a : 0 : s - c)$  y  $C_{I_c}(s - a : s - b : 0)$ , de tangencia de las circunferencias exinscritas con los correspondientes lados, son los pies de las cevianas del punto de Nagel ( $X_8$  en ETC)  $N_a(s - a : s - b : s - c)$ .

El punto de intersección de las rectas  $BB_{I_a} \cap CC_{I_a}$ , que tiene de coordenadas

$$((s-b)(s-c), -s(s-b), -s(s-c)),$$

está en la ceviana del punto de Nagel, por el vértice  $A$ . Lo mismo ocurre cuando se consideran las otras dos circunferencia exinscritas.

**12.5** Los puntos  $X, Y$  y  $Z$  simétricos de  $I_a, I_b$  e  $I_c$  respecto a  $BC, CA$  y  $AB$ , forman un triángulo perspectivo con  $\widehat{ABC}$ , ya que  $I_aX/XA_{I_a} = 2/-1$ ,  $I_bY/YB_{I_b} = 2/-1$  y  $I_cZ/ZC_{I_c} = 2/-1$ , y, por (5.12), se tiene que

$$X(a^2 : ab - 2S_C : ac - 2S_B), \quad Y(ab - 2S_C : b^2 : bc - 2S_A), \quad Z(ac - 2S_B : bc - 2S_A : c^2).$$

Que se pueden poner en la forma

$$\begin{aligned} X & \left( \frac{a^2}{(ac - 2S_B)(ab - 2S_C)} : \frac{1}{ac - 2S_B} : \frac{1}{ab - 2S_C} \right), \\ Y & \left( \frac{1}{bc - 2S_A} : \frac{b^2}{(bc - 2S_A)(ab - 2S_C)} : \frac{1}{ab - 2S_C} \right), \\ Z & \left( \frac{1}{bc - 2S_A} : \frac{1}{ac - 2S_B} : \frac{c^2}{(bc - 2S_A)(ac - 2S_B)} \right). \end{aligned}$$

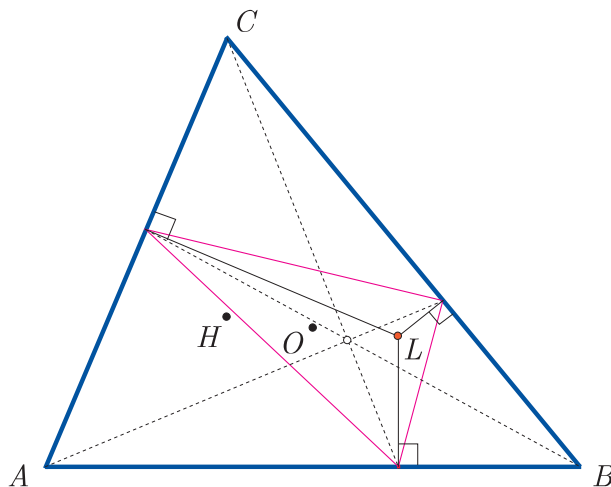
Con lo que  $\widehat{XYZ}$  es perspectivo con  $\widehat{ABC}$  (ver pág. 10) y el centro de perspectividad es ( $X_{80}$  de ETC):

$$\left( \frac{1}{bc - 2S_A} : \frac{1}{ac - 2S_B} : \frac{1}{ab - 2S_C} \right).$$

Este punto es el  $J_{\frac{A-\pi}{2}}$  (§16.4.15) y el simétrico del incentro  $I(a : b : c)$  respecto al punto de Feuberbach (pág. 126)  $F((-a + b + c)(b - c)^2 : (a - b + c)(c - a)^2 : (a + b - c)(a - b)^2)$ .

**12.6** Como ejemplo de relación entre triángulos cevianos y pedales, se tiene el siguiente resultado:

En un triángulo escaleno, uno de los puntos cuyo triángulo pedal es el triángulo ceviano de un punto (es decir, el triángulo y su triángulo pedal son perspectivos) es el simétrico del ortocentro respecto al circuncentro.



En efecto, para que los pedales de  $P(u : v : w)$  sean los pies de las cevianas de algún punto, es suficiente — por (6.25) y (12.48)— que

$$b^2u + vS_C = c^2u + wS_B, \quad a^2v + uS_C = c^2v + wS_A, \quad a^2w + uS_B = b^2w + vS_A,$$

o, equivalentemente, que  $u, v, w$ , sean solución del sistema

$$(S_C - S_B)u + S_Cv - S_Bw = 0, \quad S_Cu + (S_C - S_A)v - S_Aw = 0, \quad S_Bu - S_Av + (S_B - S_A)w = 0.$$

Cuya solución es el punto  $L$ , denominado punto de De Longschamps ( $X_{20}$  de ETC), de coordenadas

$$(S_AS_B - S_BS_C + S_CS_A : S_BS_C - S_CS_A + S_AS_B : S_CS_A - S_AS_B + S_BS_C).$$

Se trata del simétrico del ortocentro  $H(S_BS_C : S_CS_A : S_AS_B)$ , cuyas suma de coordenadas es  $S^2$ , respecto al circuncentro  $O((S_B + S_C)S_A : (S_C + S_A)S_B : (S_A + S_B)S_C)$ , de suma de las coordenadas  $2S^2$ ; puesto que, el punto que separa a  $HO$  en la razón  $-2$  ( $HX : XO = -2 : 1$ ) es, según (5.12),

$$2S^2(S_BS_C : S_CS_A : S_AS_B) + (-2)S^2((S_B + S_C)S_A : (S_C + S_A)S_B : (S_A + S_B)S_C).$$

□

En términos de los ángulos, se obtiene inmediatamente que las coordenadas baricéntricas del punto de De Longschamps son

$$(\tag B + \tag C - \tag A : \tag C + \tag A - \tag B : \tag A + \tag B - \tag C).$$

Los pedales del punto de De Longschamps son  $(0 : S_B : S_C)$ ,  $(S_A : 0 : S_C)$  y  $(S_A : S_B : 0)$ , que son los pies de las cevianas del punto de coordenadas  $(S_A : S_B : S_C)$  ( $X_{69}$  de ETC), conjugado isotómico (pág. 102) del ortocentro.

Para que el triángulo pedal  $\widehat{A_P B_P C_P}$  de un punto  $P(x : y : z)$  sea el triángulo ceviano  $\widehat{Q_a Q_b Q_c}$  de otro punto  $Q$  ha de ocurrir que las rectas  $AA_P$ ,  $BB_P$  y  $CC_P$  concurren en  $Q$ ; es decir

$$\begin{vmatrix} 0 & -S_Bx - a^2z & S_Cx + a^2y \\ S_Ay + b^2z & 0 & -b^2x - S_Cy \\ -c^2y - S_Az & c^2x + S_Bz & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

O sea,

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{\substack{S_A S_B S_C \\ abc xyz}} (S_AS_B - S_BS_C + S_AS_C)x(c^2y^2 - b^2z^2) &= 0, \\ \mathfrak{S}_{abc xyz} (2a^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2 - 3a^4)x(c^2y^2 - b^2z^2) &= 0. \end{aligned}$$

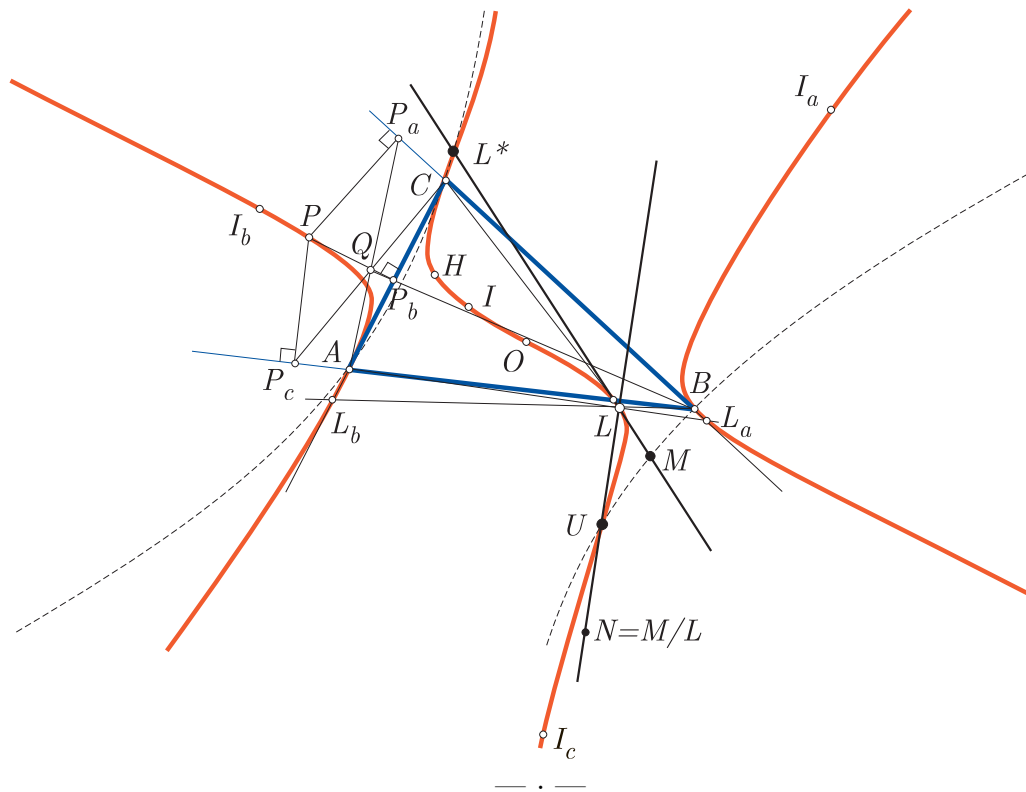
Por tanto,  $X$  ha de estar en la cúbica de Darboux. <sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup> Construction of a pivotal isocubic  $p\mathcal{K}$

(Special Isocubics in the Triangle Plane Jean-Pierre Ehrmann and Bernard Gibert November 16, 2005. pag. 9)

Let  $X$  be the pivot and  $X^*$  its isogonal conjugate. Let  $M$  be a variable point on the line  $XX^*$ . Draw  $N = M/X$  perspector of the cevian triangle of  $M$  and the anticevian triangle of  $X$ . The circum-conic through  $M$  and  $X^*$  intersects the line  $XN$  at two points  $U$  and  $U^*$  which are isogonal conjugate points on the cubic and harmonic conjugates with respect to  $X$  and  $N$ .

The Darboux cubic is the isogonal  $p\mathcal{K}$  with pivot  $X = L = X_{20}$ .



### 12.7 Comprobemos, ahora, que:

El triángulo excentral  $\widehat{I_a I_b I_c}$  es perspectivo con los triángulos medial  $\widehat{M_a M_b M_c}$  y con el de contacto interior  $\widehat{A_I B_I C_I}$ .

Las rectas  $I_a M_a$ ,  $I_b M_b$  y  $I_c M_c$  tienen por ecuaciones

$$(b - c)x + ay - az = 0, \quad bx + (a - c)y - bz = 0, \quad cx - cy + (a - b)z = 0.$$

Las cuales concurren en el punto intermedio ("Mittelpunkt",  $X_9$  de ETC):

$$M_t(a(-a + b + c) : b(a - b + c) : c(a + b - c)).$$

Las rectas  $I_a A_I$ ,  $I_b B_I$  y  $I_c C_I$  tienen por ecuaciones

$$\begin{aligned} (bS_B - cS_C)x + a(ac + S_B)y - a(ab + S_C)z &= 0, \\ b(bc + S_A)x + (aS_A - cS_C)y - b(ab + S_C)z &= 0, \\ c(bc + S_A)x - c(ac + S_B)y + (aS_A - bS_B)z &= 0, \end{aligned}$$

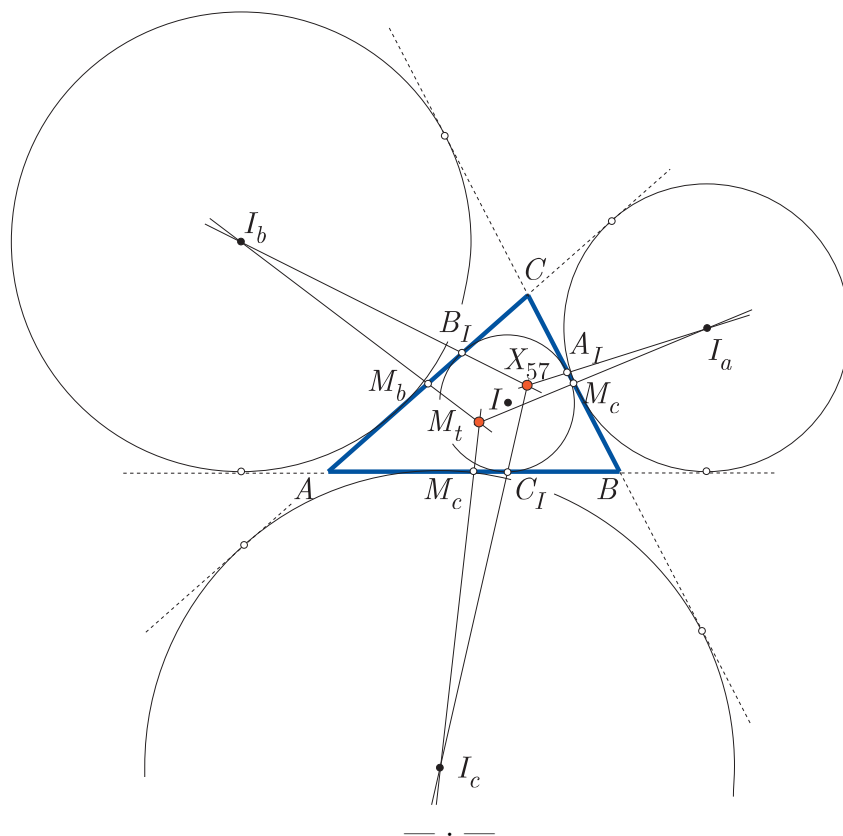
y se cortan en

$$(a(abc - aS_A + bS_B + cS_C) : b(a(bc + S_A) - bS_B + cS_C) : c(a(bc + S_A) + bS_B - cS_C)),$$

o evaluando  $S_A$ ,  $S_B$  y  $S_C$  y simplificando queda el punto ( $X_{57}$  de ETC):

$$(a(a + b - c)(a - b + c) : b(b + c - a)(b - c + a) : c(c + a - b)(c - a + b)).$$

□



**12.8** Como aplicación del uso de las ecuaciones de rectas paralelas y perpendiculares, vamos a obtener algunos puntos asociados a un triángulo relacionados con paralelas a sus lados por los puntos de tangencia de las circunferencias tritangentes:

En el triángulo  $\widehat{ABC}$ , la perpendicular por el vértice  $B$  al lado  $BC$  corta a la paralela al lado  $BC$  por  $B_I(bc + S_C : 0 : bc + S_A)$  en el punto  $B_a$  y la perpendicular por el vértice  $C$  al lado  $BC$  corta a la paralela al lado  $BC$  por  $C_I(ca + S_B : cb + S_A : 0)$  en el punto  $C_a$ . Sea  $A'$  el punto medio de  $B_aC_a$ . Los puntos  $B'$  y  $C'$  se definen cíclicamente. Entonces, los triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{A'B'C'}$  son perspectivas y su centro de perspectividad es el punto (no figura en ETC) de coordenadas:

$$\left( \frac{-a + b + c}{a^2 + b^2 + c^2 - 2a(b + c)} : \frac{a - b + c}{a^2 + b^2 + c^2 - 2b(c + a)} : \frac{a + b - c}{a^2 + b^2 + c^2 - 2c(a + b)} \right).$$

En efecto, las rectas  $BB_a$  y  $B_I B_a$  tienen por ecuaciones, respectivamente,

$$S_B x + a^2 z = 0, \quad (bc + S_A)x - (ab + S_C)y - (ab + S_C)z = 0.$$

Con lo que las coordenadas del punto  $B_a$  son:

$$B_a (a^2(ab + S_C) : S^2 + ab(ac + S_B) : -S_B(ab + S_C))$$



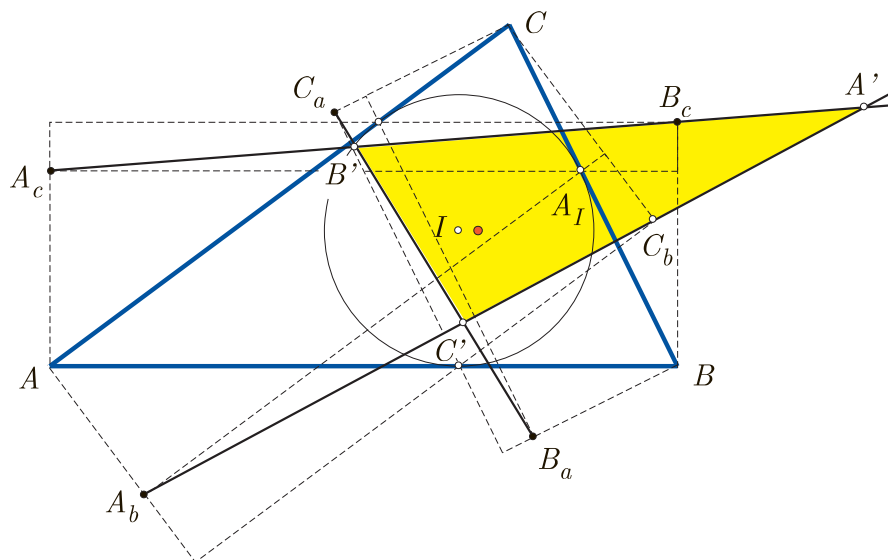
El punto  $A'$  es la intersección de las rectas  $C_bA_b$  y  $A_cB_c$  de ecuaciones respectivas:

$$-2b^2c(a+b-c)x - (a+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)y + 2ab^2(a-b-c)z = 0,$$

$$2bc^2(-a+b-c)x + 2ac^2(a-b-c)y - (a+b)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)z = 0.$$

Con lo que

$$A' \left( *** : \frac{b(a-b+c)}{b^2(c+a) - 2b(c^2+ca+a^2) + (c+a)^3} : \frac{c(a+b-c)}{c^2(a+b) - 2c(a^2+ab+b^2) + (a+b)^3} \right).$$



Las rectas  $A_cB_c$  y  $B_aC_a$  se cortan en

$$B' \left( \frac{a(-a+b+c)}{a^2(b+c) - 2a(b^2+bc+c^2) + (b+c)^3} : *** : \frac{c(a+b-c)}{c^2(a+b) - 2c(a^2+ab+b^2) + (a+b)^3} \right).$$

Y, finalmente, las rectas  $B_aC_a$  y  $C_bA_b$  en

$$C' \left( \frac{a(-a+b+c)}{a^2(b+c) - 2a(b^2+bc+c^2) + (b+c)^3} : \frac{b(a-b+c)}{b^2(c+a) - 2b(c^2+ca+a^2) + (c+a)^3} : *** \right).$$

□

En el triángulo  $\widehat{ABC}$ , la perpendicular por el vértice  $B$  al lado  $BC$  corta a la paralela al lado  $BC$  por  $C_I(ca + S_B : cb + S_A : 0)$  en el punto  $B_a^*$  y la perpendicular por el vértice  $C$  al lado  $BC$  corta a la paralela al lado  $BC$  por  $B_I(ba + S_C : 0 : \underline{bc} + S_A)$  en el punto  $C_a^*$ . Los puntos  $C_b^*, A_b^*, A_c^*$  y  $B_c^*$  se define cíclicamente. El triángulo  $A''B''C''$ , limitado por las rectas  $B_a^*C_a^*, C_b^*A_b^*$  y  $A_c^*B_c^*$ , es perspectivo con  $\widehat{ABC}$ , con centro de perspectividad en el punto  $(X_{951}$  de ETC) de coordenadas:

$$\left( \frac{a^2}{(-a+b+c)(2a^3+a^2(b+c)+(b-c)^2(b+c))} : \dots : \dots \right).$$

El punto  $A''$  es la intersección de las rectas  $C_b^*A_b^*$  y  $A_c^*B_c^*$  de ecuaciones respectivas:

$$2ab^2(a-b-c)x + (a+c)(a-b+c)(a^2+b^2-2ac+c^2)y - 2b^2(a+b-c)cz = 0,$$



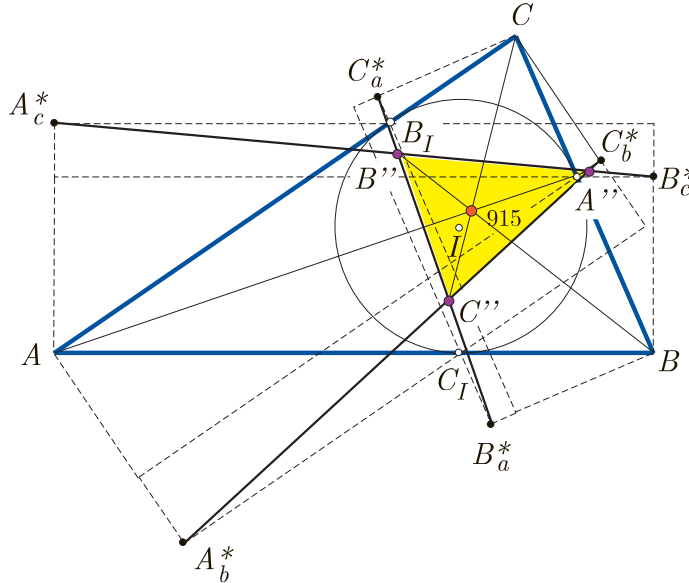
$$2a(a-b-c)c^2x + 2b(-a+b-c)c^2y + (a+b)(a+b-c)(a^2-2ab+b^2+c^2)z = 0.$$

Con lo que

$$A'' \left( *** : \frac{b^2(-a+b+c)(a+b-c)}{(2b^3+b^2(c+a)+(c-a)^2(c+a))} : \frac{c^2(-a+b+c)(a-b+c)}{(2c^3+c^2(a+b)+(a-b)^2(a+b))} \right).$$

Las rectas  $A_c^*B_c^*$  y  $B_a^*C_a^*$  se cortan en

$$B'' \left( \frac{a^2(a-b+c)(a+b-c)}{(2a^3+a^2(b+c)+(b-c)^2(b+c))} : *** : \frac{c^2(-a+b+c)(a-b+c)}{(2c^3+c^2(a+b)+(a-b)^2(a+b))} \right).$$



Y, finalmente, las rectas  $B_a^*C_a^*$  y  $C_b^*A_b^*$  en

$$C'' \left( \frac{a^2(a-b+c)(a+b-c)}{(2a^3+a^2(b+c)+(b-c)^2(b+c))} : \frac{b^2(-a+b+c)(a+b-c)}{(2b^3+b^2(c+a)+(c-a)^2(c+a))} : *** \right).$$

□

**12.9** Vamos a hacer un estudio similar al recién hecho, tomando las circunferencias exinscritas.

En el triángulo  $\widehat{ABC}$ , la perpendicular por el vértice  $B$  al lado  $BC$  corta a la paralela al lado  $BC$  por  $B_{I_a}(-ab + S_C : 0 : bc + S_A)$  en el punto  $B_a$  y la perpendicular por el vértice  $C$  al lado  $BC$  corta a la paralela al lado  $BC$  por  $C_{I_a}(-ac + S_B : bc + S_A : 0)$  en el punto  $C_a$ . El triángulo  $A'B'C'$ , limitado por las rectas  $B_aC_a, C_bA_b$  y  $A_cB_c$ , es perspectivo con  $\widehat{ABC}$ , con centro de perspectividad en el punto (no figura en ETC) de coordenadas

$$\left( \frac{a}{a^3(b+c) + a^2(b^2 + 4bc + c^2) - a(b^3 + b^2c + bc^2 + c^3) - (b^2 - c^2)^2} : \dots : \dots \right).$$

El punto  $B_a$  es la intersección de las rectas

$$BB_a : S_Bx + a^2z = 0, \quad B_{I_a}B_a : (bc + S_A)x + (ab - S_C)y + (ab - S_C)z = 0,$$

$$B_a(2a^2(a-b+c) : -(a+b-c)(a^2 - b^2 + c^2 + 2a(b+c)) : -(a-b+c)(a^2 - b^2 + c^2)).$$

El punto  $C_a$  es donde se cortan las rectas

$$CC_a : S_C x + a^2 y = 0, \quad C_{I_a} C_a : (bc + S_A)x + (ac - S_B)y + (ac - S_B)z = 0,$$

$$C_a (2a^2(a + b - c) : -(a + b - c)(a^2 + b^2 - c^2) : -(a - b + c)(a^2 + b^2 - c^2 + 2a(b + c))).$$

Similarmente, se obtienen los puntos  $C_b, A_b, A_c, B_c$ , siendo sus coordenadas:

$$C_b ((a + b - c)(a^2 + b^2 - c^2) : -2b^2(a + b - c) : -(a - b - c)(a^2 + 2ab + b^2 + 2bc - c^2)),$$

$$A_b (-(a + b - c)(a^2 - 2ab - (b + c)^2) : -2b^2(-a + b + c) : (a - b - c)(a^2 - b^2 - c^2)),$$

$$A_c (-(a - b + c)(a^2 - 2ac - (b + c)^2) : (a - b - c)(a^2 - b^2 - c^2) : 2(a - b - c)c^2),$$

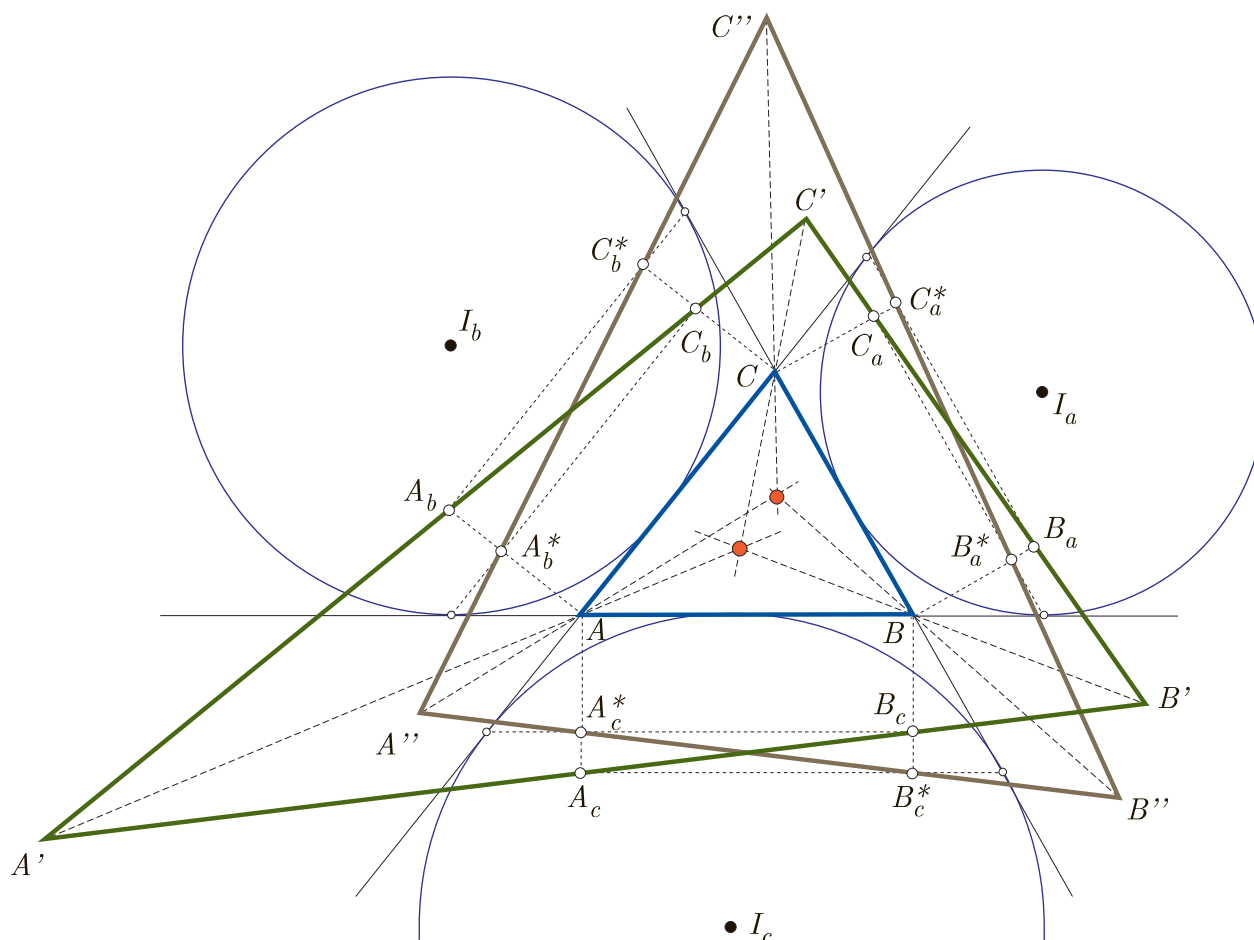
$$B_c ((a - b + c)(a^2 - b^2 + c^2) : -(a - b - c)(a^2 - b^2 + 2ac + 2bc + c^2) : -2c^2(a - b + c)).$$

El punto  $A'$  es la intersección de las rectas  $C_b A_b$  y  $A_c B_c$  de ecuaciones respectivas:

$$2b^2c(-a + b + c)x - (a - b - c)(a + b - c)(a + c)(a + b + c)y + 2ab^2(a + b - c)z = 0,$$

$$2bc^2(-a + b + c)x + 2ac^2(a - b + c)y - (a + b)(a - b - c)(a - b + c)(a + b + c)z = 0,$$

$$A' \left( \begin{array}{l} *** : \frac{b}{b^3(c + a) + b^2(c^2 + 4ca + a^2) - b(c^3 + c^2a + ca^2 + a^3) - (c^2 - a^2)^2} : \\ \frac{c}{c^3(a + b) + c^2(a^2 + 4ab + b^2) - c(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) - (a^2 - b^2)^2} \end{array} \right),$$



Los puntos  $B' = A_c B_c \cap B_a C_a$  y  $C' = B_a C_a \cap C_b A_b$  se obtienen de forma similar, siendo:

$$B' \left( \frac{a}{a^3(b+c) + a^2(b^2 + 4bc + c^2) - a(b^3 + b^2c + bc^2 + c^3) - (b^2 - c^2)^2} : * * * : \frac{c}{c^3(a+b) + c^2(a^2 + 4ab + b^2) - c(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) - (a^2 - b^2)^2} \right),$$

$$C' \left( \frac{a}{a^3(b+c) + a^2(b^2 + 4bc + c^2) - a(b^3 + b^2c + bc^2 + c^3) - (b^2 - c^2)^2} : \frac{b}{b^3(c+a) + b^2(c^2 + 4ca + a^2) - b(c^3 + c^2a + ca^2 + a^3) - (c^2 - a^2)^2} : * * * \right).$$

□

En el triángulo  $\widehat{ABC}$ , la perpendicular por el vértice  $B$  al lado  $BC$  corta a la paralela al lado  $BC$  por  $C_{I_a}(-ac + S_B : bc + S_A : 0)$  en el punto  $B_a^*$  y la perpendicular por el vértice  $C$  al lado  $BC$  corta a la paralela al lado  $BC$  por  $B_{I_a}(-ab + S_C : 0 : bc + S_A)$  en el punto  $C_a^*$ . El triángulo  $A''B''C''$ , limitado por las rectas  $B_a^*C_a^*$ ,  $C_b^*A_b^*$  y  $A_c^*B_c^*$ , es perspectivo con  $\widehat{ABC}$ , con centro de perspectividad en el punto (no figura en ETC) de coordenadas

$$\left( \frac{a^2}{2a^5 + a^4(b+c) - 2a^3(b-c)^2 - 4a^2bc(b+c) - (b-c)^2(b+c)^3} : \dots : \dots \right).$$

El punto  $B_a^*$  es la intersección de las rectas

$$BB_a^* : S_B x + a^2 z = 0, \quad C_{I_a} B_a^* : (bc + S_A)x + (ac - S_B)y + (ac - S_B)z = 0,$$

$$B_a^* (2a^2(a+b-c) : -a^3 - (b-c)^2(b+c) - a^2(b+3c) + a(c^2 - b^2) : -(a+b-c)(a^2 - b^2 + c^2)).$$

El punto  $C_a^*$  es donde se cortan las rectas

$$CC_a^* : S_C x + a^2 y = 0, \quad B_{I_a} C_a^* : (bc + S_A)x + (ab - S_C)y + (ab - S_C)z = 0,$$

$$C_a^* (2a^2(a-b+c) : -(a-b+c)(a^2 + b^2 - c^2) : -a^3 - (b-c)^2(b+c) - a^2(3b+c) + a(b^2 - c^2)).$$

Similarmente, se obtienen los puntos  $C_b^*$ ,  $A_b^*$ ,  $A_c^*$ ,  $B_c^*$ , siendo sus coordenadas:

$$C_b^* (-(a-b-c)(a^2 + b^2 - c^2) : -2b^2(-a+b+c) :$$

$$a^3 + b^3 + b^2c + bc^2 + c^3 - a^2(b+c) + a(3b^2 - c^2)),$$

$$A_b^* (a^3 + b^3 + a^2(b-c) + 3b^2c - bc^2 + c^3 + a(b^2 - c^2) :$$

$$-2b^2(a+b-c) : -(a+b-c)(a^2 - b^2 - c^2)),$$

$$A_c^* (a^3 + b^3 - b^2c + 3bc^2 + c^3 + a^2(-b+c) + a(-b^2 + c^2) :$$

$$-(a-b+c)(a^2 - b^2 - c^2) : -2c^2(a-b+c)),$$

$$B_c^* (-(a-b-c)(a^2 - b^2 + c^2) : a^3 + b^3 + b^2c + bc^2 + c^3 - a^2(b+c) - a(b^2 - 3c^2) :$$

$$2(a - b - c)c^2).$$

El punto  $A''$  es la intersección de las rectas  $C_b^*A_b^*$  y  $A_c^*B_c^*$  de ecuaciones respectivas:

$$2ab^2(a + b - c)x + (a + c)(a + b + c)(a^2 + b^2 - 2ac + c^2)y + 2b^2c(-a + b + c)z = 0,$$

$$2ac^2(a - b + c)x + 2bc^2(-a + b + c)y + (a + b)(a + b + c)(a^2 - 2ab + b^2 + c^2)z = 0.$$

$$A'' \left( \begin{array}{l} *** : \frac{b^2}{-2b^5 - b^4(c + a) + 2b^3(c - a)^2 + 4b^2ca(c + a) + (c - a)^2(c + a)^3} : \\ \frac{c^2}{-2c^5 - c^4(a + b) + 2c^3(a - b)^2 + 4c^2ab(a + b) + (a - b)^2(a + b)^3} \end{array} \right).$$

Los puntos  $B'' = A_c^*B_c^* \cap B_a^*C_a^*$  y  $C'' = B_a^*C_a^* \cap C_b^*A_b^*$  se obtienen de forma similar, siendo:

$$B'' \left( \begin{array}{l} \frac{a^2}{-2a^5 - a^4(b + c) + 2a^3(b - c)^2 + 4a^2bc(b + c) + (b - c)^2(b + c)^3} : \\ *** : \frac{c^2}{-2c^5 - c^4(a + b) + 2c^3(a - b)^2 + 4c^2ab(a + b) + (a - b)^2(a + b)^3} \end{array} \right),$$

$$C'' \left( \begin{array}{l} \frac{a^2}{-2a^5 - a^4(b + c) + 2a^3(b - c)^2 + 4a^2bc(b + c) + (b - c)^2(b + c)^3} : \\ \frac{b^2}{-2b^5 - b^4(c + a) + 2b^3(c - a)^2 + 4b^2ca(c + a) + (c - a)^2(c + a)^3} : *** \end{array} \right).$$

■

Con las mismas notaciones anteriores para los puntos  $B_a, B_a^*, C_a, C_a^*, C_b, C_b^*, A_b, A_b^*, A_c, A_c^*, B_c, B_c^*$  (conservando las mismas para los casos de la circunferencia inscrita o las exinscritas), se tienen los dos siguientes resultados, en los que aparecen los conceptos de tripolo y conjugado isotómico que se tratan en los párrafos § 17 y § 18:

Caso de la circunferencia inscrita:

Los puntos  $A' = BC \cap B_a C_a, B' = CA \cap C_b A_b$  y  $C' = AB \cap A_c B_c$  están alineados. El tripolo de la recta que los contiene es el punto intermedio ( $X_9$  de ETC)

$$M_t(a(-a + b + c) : b(a - b + c) : c(a + b - c)).$$

Los puntos  $A'' = BC \cap B_a^* C_a^*, B'' = CA \cap C_b^* A_b^*$  y  $C'' = Ab \cap A_c^* B_c^*$  están alineados. El tripolo de la recta que los contiene es el isotómico conjugado del punto intermedio ( $X_{85}$  de ETC)

$$\left( \frac{1}{a(-a + b + c)} : \frac{1}{b(a - b + c)} : \frac{1}{c(a + b - c)} \right).$$

Se tiene que

$$\begin{array}{ll} A'(0 : b(a - b + c) : c(-a - b + c)), & A''(0 : (a + b - c)c : b(-a + b - c)), \\ B'(a(a - b - c) : 0 : c(a + b - c)), & B''(c(-a - b + c) : 0 : a(-a + b + c)), \\ C'(a(-a + b + c) : b(-a + b - c) : 0). & C''(b(a - b + c) : a(a - b - c) : 0). \end{array}$$

Cada terna de puntos  $A', B', C'$  y  $A'', B'', C''$  están, respectivamente, en las rectas:

$$bc(a-b+c)(a+b-c)x + ac(-a+b+c)(a+b-c)y + ab(-a+b+c)(a-b+c)z = 0.$$

$$a(-a+b+c)x + b(a-b+c)y + c(a+b-c)z = 0.$$

□

Además, estas rectas se cortan en el punto

$$\left( a(b-c)(-a+b+c)^2((b-c)^2 - a(b+c)) : \dots : \dots \right).$$

Caso de las circunferencias exinscritas:

Los puntos  $A' = BC \cap B_a C_a$ ,  $B' = CA \cap C_b A_b$  y  $C' = AB \cap A_c B_c$  están alineados. El tripolo de la recta que los contiene es el punto ( $X_{57}$  de ETC)

$$\left( \frac{1}{bc(-a+b+c)} : \frac{1}{ca(a-b+c)} : \frac{1}{ab(a+b-c)} \right).$$

Los puntos  $A'' = BC \cap B_a^* C_a^*$ ,  $B'' = CA \cap C_b^* A_b^*$  y  $C'' = Ab \cap A_c^* B_c^*$  están alineados. El tripolo de la recta que los contiene es el punto ( $X_{312}$ , isotómico conjugado del  $X_{57}$  de ETC)

$$(bc(-a+b+c) : ac(a-b+c) : ab(a+b-c)).$$

$$\begin{aligned} A' &(0 : -b(a+b-c) : c(a-b+c)), & A'' &(0 : -c(a-b+c) : b(a+b-c)), \\ B' &(a(a+b-c) : 0 : -c(-a+b+c)), & B'' &(c(-a+b+c) : 0 : -a(a+b-c)), \\ C' &(-a(a-b+c) : b(-a+b+c) : 0). & C'' &(-b(-a+b+c) : a(a-b+c) : 0). \end{aligned}$$

Cada terna de puntos  $A', B', C'$  y  $A'', B'', C''$  están en las respectivas rectas:

$$bc(-a+b+c)x + ac(a-b+c)y + ab(a+b-c)z = 0.$$

$$a(a+b-c)(a-b+c)x + b(a+b-c)(-a+b+c)y + -c(a-b-c)(a-b+c)z = 0.$$

□

Además, estas rectas se cortan en el punto

$$\left( a(a-b-c)(b-c)((b-c)^2 + a(b+c)) : \dots : \dots \right).$$

— . —

### 12.10 Punto de Bevan:

Las perpendiculares por  $I_a, I_b, I_c$  a los correspondientes lados de  $\widehat{ABC}$  se cortan en el punto de Bevan:

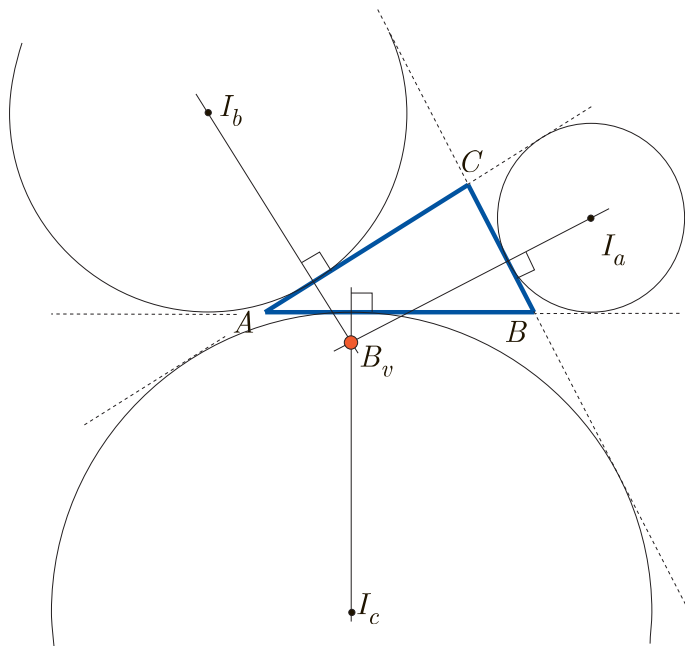
$$B_v \left( -\frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c} : \frac{a}{s-a} - \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c} : \frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} - \frac{c}{s-c} \right).$$

Los puntos del infinito de las perpendiculares a los lados  $BC, CA$  y  $AB$  son (12.45), respectivamente

$$(-a^2 : S_C : S_B), \quad (S_C : -b^2 : S_A), \quad (S_B : S_A : -c^2).$$

Así, la perpendicular por  $I_a(-a : b : c)$   $BC$  es

$$(cS_C - bS_B)x + (a^2c - aS_B)y + (aS_C - a^2b)z = 0.$$



Utilizando fórmulas de (2.4), esta ecuación y, similarmente, las de las otras dos perpendiculares son:

$$\begin{aligned} (b - c)sx + a(s - c)y - a(s - b)z &= 0, \\ -b(s - c)x + (c - a)sy + b(s - a)z &= 0, \\ c(s - b)x - c(s - a)y + (a - b)sz &= 0. \end{aligned}$$

Como el determinante formado por los coeficientes de estas ecuaciones se anula, el sistema tiene solución; tomando las dos primeras, la solución es:

$$\begin{aligned} &\left( \begin{array}{cc|cc|cc} a(s - c) & -a(s - b) & -a(s - b) & (b - c)s & (b - c)s & a(s - c) \\ (c - a)s & b(s - a) & b(s - a) & -b(s - a) & -b(s - a) & (c - a)s \end{array} \right) = \\ &= (ab(s - c)(s - a) + a(c - a)s(s - b) : bc(s - a)(s - b) + b(c - b)s(s - c) : ca(s - b)(s - c) + c(c - c)s(s - a)). \end{aligned}$$

La primera coordenada se puede poner de la forma

$$a(b(s - c)(s - a) - as(s - b) + cs(s - b)),$$

y si se le suma y resta la expresión  $ac(s - b)$ , queda así:

$$a(b(s - c)(s - a) - as(s - b) + ac(s - b) - ac(s - b) + cs(s - b)),$$

que es la misma que

$$a(b(s - c)(s - a) - a(s - b)(s - c) + c(s - b)(s - a)).$$

Las otras dos componentes se obtienen permutando ésta cíclicamente. En definitiva el punto encontrado tiene de coordenadas

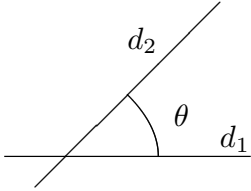
$$B_v \left( -\frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c} : \frac{a}{s-a} - \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c} : \frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} - \frac{c}{s-c} \right).$$

Conocido como punto de Bevan ( $X_{40}$  de ETC). Este punto es el circuncentro del triángulo excentral (pág. 121).  $\square$

## 13 Giro de rectas

**13.1** Dada una recta  $d \equiv px + qy + rz = 0$ , el vector  $\vec{v} = (q - r, r - p, p - q)$  es paralelo a  $d$  (pág. 28) y se dice que la recta  $d$  está orientada por el  $\vec{v}$ .

El ángulo  $\theta$  entre dos rectas  $d_1$  y  $d_2$ , que se toma entre  $0$  y  $\pi/2$ , viene dado por la fórmula (11.37); esto es, si  $d_i \equiv p_i x + q_i y + r_i z = 0$  y  $\vec{v}_i = (\lambda_i, \mu_i, \nu_i) = (q_i - r_i, r_i - p_i, p_i - q_i)$ , para  $i = 1, 2$ , son, respectivamente, las ecuaciones de las rectas y las componentes de los vectores paralelos a ellas:



$$\cos \theta = \frac{S_A \lambda_1 \lambda_2 + S_B \mu_1 \mu_2 + S_C \nu_1 \nu_2}{\sqrt{S_A \lambda_1^2 + S_B \mu_1^2 + S_C \nu_1^2} \sqrt{S_A \lambda_2^2 + S_B \mu_2^2 + S_C \nu_2^2}}.$$

Como se verifica que  $\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2 = \mu_1 \nu_2 - \nu_1 \mu_2 = \nu_1 \lambda_2 - \lambda_1 \nu_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = \delta$ , se obtiene

que

$$\begin{aligned} \sen^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta = \\ &= \frac{(S_A \lambda_1^2 + S_B \mu_1^2 + S_C \nu_1^2)(S_A \lambda_2^2 + S_B \mu_2^2 + S_C \nu_2^2) - (S_A \lambda_1 \lambda_2 + S_B \mu_1 \mu_2 + S_C \nu_1 \nu_2)^2}{(S_A \lambda_1^2 + S_B \mu_1^2 + S_C \nu_1^2)(S_A \lambda_2^2 + S_B \mu_2^2 + S_C \nu_2^2)} = \\ &= \frac{S_B S_C (\mu_1 \nu_2 - \nu_1 \mu_2)^2 + S_C S_A (\nu_1 \lambda_2 - \lambda_1 \nu_2)^2 + S_A S_B (\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2)^2}{(S_A \lambda_1^2 + S_B \mu_1^2 + S_C \nu_1^2)(S_A \lambda_2^2 + S_B \mu_2^2 + S_C \nu_2^2)} = \\ &= \frac{(S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A) \delta^2}{(S_A \lambda_1^2 + S_B \mu_1^2 + S_C \nu_1^2)(S_A \lambda_2^2 + S_B \mu_2^2 + S_C \nu_2^2)}. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\sen \theta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{S_A \lambda_1^2 + S_B \mu_1^2 + S_C \nu_1^2} \sqrt{S_A \lambda_2^2 + S_B \mu_2^2 + S_C \nu_2^2}}.$$

Con lo que el ángulo entre dos rectas,  $d_1$  y  $d_2$ , ( $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ) viene dado por

$$\cotag \theta = \frac{S_A \lambda_1 \lambda_2 + S_B \mu_1 \mu_2 + S_C \nu_1 \nu_2}{S \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}}.$$

Cuando se cambia el sentido, por ejemplo, del vector  $\vec{v}_1$ , el numerador y denominador de esta expresión cambian de signo. Y si se intercambian los índices,  $1 \leftrightarrow 2$ , sólo cambia el signo del denominador. Se concluye que el ángulo orientado  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) del par ordenado  $(d_1, d_2)$  de rectas orientadas  $d_i \equiv p_i x + q_i y + r_i z = 0$  ( $i = 1, 2$ ), no depende del sentido que se tome en la dirección de cada recta, determinada por los vectores  $\vec{v}_i = (q_i - r_i, r_i - p_i, p_i - q_i)$ , y viene dado por

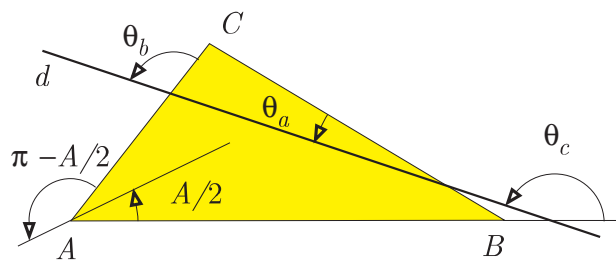
$$S_\theta = S \cotag \theta = \frac{S_A(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + S_B(r_1 - p_1)(r_2 - p_2) + S_C(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}}. \quad (13.53)$$

Para rectas perpendiculares, el numerador de esta fórmula se anula por (12.42), es decir,  $\theta = \pi/2$ .

De esta fórmula también surge que el ángulo orientado  $\theta$  entre la recta  $px + qy + rz = 0$  y la que tiene como punto del infinito  $(x_0 : y_0 : z_0)$ , está dado por

$$S_\theta = S \cotag \theta = \frac{S_A(q - r)x_0 + S_B(r - p)y_0 + S_C(p - q)z_0}{px_0 + qy_0 + rz_0}. \quad (13.54)$$

En particular, los ángulos orientados  $\theta_a, \theta_b$  y  $\theta_c$ , que los lados  $BC$  ( $x = 0$ ),  $CA$  ( $y = 0$ ) y  $AB$  ( $z = 0$ ) forman con la recta  $px + qy + rz = 0$ , están dados por



$$\begin{aligned} \cotag \theta_a &= \frac{(p - r)S_B - (q - p)S_C}{(q - r)S}, \\ \cotag \theta_b &= \frac{(q - p)S_C - (r - q)S_A}{(r - p)S}, \\ \cotag \theta_c &= \frac{(r - q)S_A - (p - r)S_B}{(p - q)S}. \end{aligned} \quad (13.55)$$

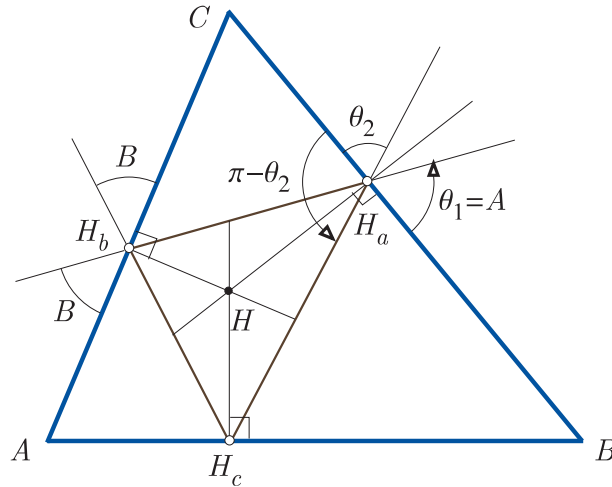
**13.2** Como ejemplo, se comprueba que la bisectriz interior en  $A$ ,  $cy - bz = 0$ , dada en (6.24), forma con los lados  $AB$  y  $CA$  ángulos orientados  $A/2$  y  $\pi - A/2$ , respectivamente. En efecto, usando (2.4) y (13.55),

$$\begin{aligned} \cotag \theta_c &= \frac{(-b - c)S_A - bS_B}{-cS} = \frac{cS_A + bc^2}{cS} = \cotag \frac{A}{2}, \\ \cotag \theta_b &= \frac{cS_C + (b + c)S_A}{-bS} = \frac{cb^2 + bS_A}{-bS} = -\cotag \frac{A}{2} = \cotag \left( \pi - \frac{A}{2} \right). \end{aligned}$$



Como otro ejemplo del uso de estas fórmulas podemos establecer que:

El ortocentro de un triángulo es el incentro de su triángulo órtico.



Deberemos probar la igualdad de los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , que forma el lado  $BC$  con  $H_aH_b$  y  $H_aH_c$ , respectivamente. Los lados del triángulo órtico,  $H_a(0 : S_C : S_B)$ ,  $H_b(S_C : 0 : S_A)$ ,  $H_c(S_B : S_A : 0)$ , tienen por ecuaciones:

$$H_aH_b : S_Ax + S_By - S_Cz = 0, \quad H_aH_c : S_Ax - S_By + S_Cz = 0.$$

Por la primera de las fórmulas (13.55):

$$\begin{aligned} \cotag \theta_1 &= \frac{(S_A + S_C)S_B - (S_B - S_A)S_C}{(S_B + S_C)S} = \frac{S^2 - S_B S_C}{(S_B + S_C)S} \\ &= \frac{1 - \cotag B \cotag C}{\cotag B + \cotag C} = -\cotag(B + C) = \cotag A, \end{aligned}$$

$$\cotag \theta_2 = -\cotag(\pi - \theta_2) = -\frac{(S_A - S_C)S_B - (-S_B - S_A)S_C}{(-S_B - S_C)S} = \frac{S^2 - S_B S_C}{(S_B + S_C)S}. \quad \square$$

El mismo procedimiento nos lleva a que el ángulo que forma  $AC$  con  $H_bH_c$  es  $B$ . Se concluye que el lado  $AB$  es antiparalelo (pág. 51) al lado correspondiente  $H_aH_b$  del triángulo órtico.

**13.3** El siguiente resultado permite interpretar los giros mediante coordenadas baricéntricas.

Si  $\theta$  es el ángulo orientado que forma la recta  $px + qy + rz = 0$  con una recta  $d$ , las coordenadas del punto del infinito de ésta son

$$(pa^2 + q(S_\theta - S_C) - r(S_\theta + S_B) : qb^2 + r(S_\theta - S_A) - p(S_\theta + S_C) : rc^2 + p(S_\theta - S_B) - q(S_\theta + S_A)). \quad (13.56)$$

Pues ya que, si  $(x : y : z)$  es el punto del infinito de la recta  $d$ ,  $S_\theta = S \cotag \theta$  y por (13.54), se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$x + y + z = 0$$

$$(pS_\theta - (q - r)S_A)x + (qS_\theta - (r - p)S_B)y + (rS_\theta - (p - q)S_C)z = 0,$$

cuya solución, en las variables  $x, y, z$ , dan las coordenadas enunciadas del punto del infinito de  $d$ . En particular, cuando  $\theta = \pi/2$ , se tiene la fórmula (12.43).  $\square$

Podemos utilizar esto para determinar la recta que pasa por un punto y que forma con otra dada un ángulo determinado, siendo este ángulo, por ejemplo, el que forman otras dos rectas dadas. Concretando:

Sean las rectas  $d_i \equiv p_i x + q_i y + r_i z = 0$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), entonces la recta  $d \equiv px + qy + rz = 0$  que pasa por el punto  $P_0(x_0 : y_0 : z_0)$  y que forma con la recta  $d_3$  el mismo ángulo que  $d_1$  con  $d_2$ , se determina de la forma siguiente: Sea  $\theta$  el ángulo que  $d_1$  forma con  $d_2$ , dado por la fórmula (13.53). Las coordenadas del punto del infinito de la recta  $d$  están dadas por (13.56) y, como ha de pasar por  $P_0(x_0 : y_0 : z_0)$ , queda determinada.

Como ejemplo, puede utilizarse este resultado para encontrar la ecuación de la bisectriz interior desde el vértice  $A$ , solamente conociendo su propiedad de que biseca este ángulo. Por (13.56) y (2.4), el punto del infinito de la bisectriz en  $A$ , la cual forma un ángulo  $\theta = A/2$  con el lado  $AB$ , es

$$(-S_{A/2} + S_B) : S_{A/2} - S_A : c^2 = (-S_A - bc - S_B : S_A + bc - S_A : c^2) = (-b - c : b : c).$$

Haciendo lo mismo para las otras bisectrices, se obtiene que sus ecuaciones (dadas en (6.24)) y las coordenadas del punto común (incentro), son

$$-cy + bz = 0, \quad cx - az = 0, \quad -bx + ay = 0, \quad I(a : b : c).$$

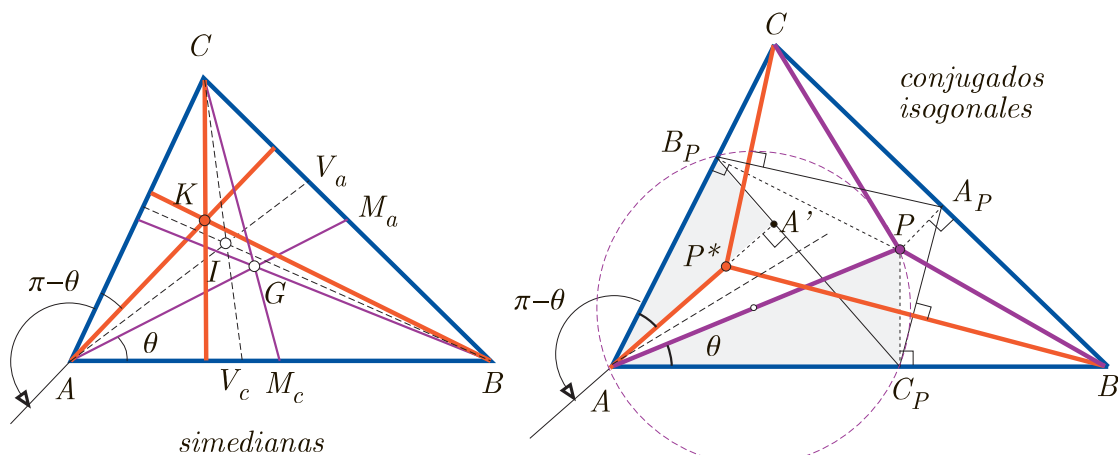
**13.4** Vamos, ahora, a determinar la ecuación de la simediana desde el vértice  $A$ , que es la recta simétrica de la mediana, respecto a la bisectriz, en el vértice  $A$ . Por consiguiente, si  $\theta$  es el ángulo que forma el lado  $AB$  ( $z = 0$ ) con la mediana por  $A$  ( $y - z = 0$ ), debe ser el mismo que forma dicha simediana con el lado  $AC$  ( $y = 0$ ); es decir, el ángulo orientado que el lado  $AC$  forma con la simediana por  $A$  debe ser  $\pi - \theta$ .

De la fórmula (13.53) y como en este caso  $p_1 = 0, q_1 = 0, r_1 = 1, p_2 = 0, q_2 = 1, r_2 = -1$ , se tiene que  $S_\theta = 2S_A + S_B$ , y por (13.56), el punto del infinito de la simediana por  $A$  es:

$$(S_{\pi-\theta} - S_C : b^2 : -(S_{\pi-\theta} + S_A)) = (-S_\theta - S_C : b^2 : S_\theta - S_A) = (-2S_A - a^2 : b^2 : c^2).$$

Cálculos análogos permiten determinar los puntos del infinito de las otras dos simedianas son  $(a^2 : -2S_B - b^2 : c^2)$  y  $(a^2 : b^2 : -2S_C - c^2)$ , por lo que sus ecuaciones son:

$$-c^2y + b^2z = 0, \quad c^2x - a^2z = 0, \quad -b^2x + a^2z = 0. \tag{13.57}$$



Estas rectas concurren en el punto denominado simediano.  $K(a^2 : b^2 : c^2)$ , conocido también como punto de Lemoine<sup>(1)</sup>. Los pies de las simedianas son los puntos de coordenadas  $(0 : b^2 : c^2)$ ,  $(a^2 : 0 : c^2)$  y  $(a^2 : b^2 : 0)$ ; con lo que *las simedianas son las rectas por los vértices que dividen al lado opuesto en la razón de los cuadrados de las longitudes de los lados adyacentes*.

— . —

Damos a continuación, hasta el final del párrafo, varios resultados que permiten construir simedianas.

Utilizando (13.56) podemos obtener la ecuación de la recta antiparalela <sup>(2)</sup>a un lado de un triángulo (respecto a los otros dos lados). Por ejemplo, la antiparalela al lado  $BC$ , que pasa por un punto  $P(u : v : w)$ , es la recta tal que el lado  $AC$  ( $y = 0$ ) forma con ella un ángulo  $\theta_b$  igual al que  $BC$  forma con  $AB$ ; es decir,  $\theta_b = B$ . Entonces, el punto del infinito de tal antiparalela es  $(S_B - S_C : b^2 : -(S_B + S_A))$  y su ecuación es:

$$d_a : \begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ S_B - S_C & b^2 & -S_B - S_C \end{vmatrix} = 0.$$

De forma similar se obtienen las antiparalelas por  $P(u : v : w)$ , a los otros dos lados  $CA$  y  $AB$ . Las ecuaciones de las antiparalelas por  $P$  son:

$$\begin{aligned} d_a : & (c^2v + b^2w)x + (b^2w - c^2(u + w))y + (c^2v - b^2(u + v))z = 0, \\ d_b : & (a^2w - c^2(v + w))x + (a^2w + c^2u)y + (c^2u - a^2(v + u))z = 0, \\ d_c : & (a^2v - b^2(w + v))x + (b^2u - a^2(w + u))y + (b^2u + a^2v)z = 0. \end{aligned} \quad (13.58)$$

Un ejemplo del uso de rectas antiparalelas es la construcción de las simedianas, utilizando el hecho:

La simediana relativa al vértice  $A$  es el lugar geométrico de los puntos medios de las antiparalelas <sup>(3)</sup> del lado opuesto  $BC$ .

Por (13.58), la antiparalela  $d_a$  a  $BC$  por el punto  $P(0, 1 - t, t)$  en  $BC$  es:

$$(c^2(t - 1) - b^2t)x + t(-b^2 + c^2)y - (b^2 - c^2)(t - 1)z = 0$$

El punto medio que ésta determina sobre los lados  $AB$  y  $AC$  es

$$(x : y : z) = (-b^2c^2 - c^4(t - 1) + b^4t : -b^2(-c^2(t - 1) + b^2t) : c^4(t - 1) - b^2c^2t).$$

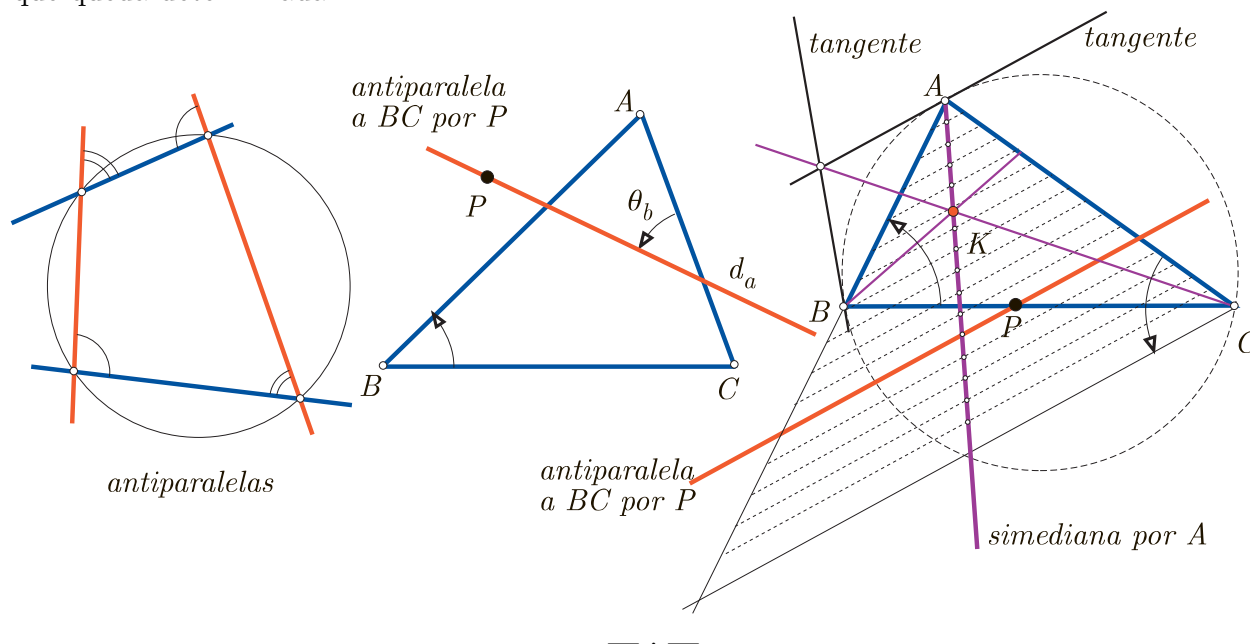
Eliminando  $t$ , se obtiene que el lugar geométrico de tales puntos medios tiene por ecuación  $c^2y - b^2z = 0$ , que es la simediana (13.57) por  $A$ . □

<sup>(1)</sup> Emile Michel Hyacinthe Lemoine (1840-1912) [12] expuso propiedades del punto conocido hoy como simediano o punto de Lemoine, por primera vez en 1873 (Nouvelles Annales de Mathématiques), luego en el Congreso de la Association scientifique pour l'avancement des Sciences, al que dio el nombre de "centro de medianas antiparalelas". Posteriormente, en 1884, M. Neuberg en Memoire sur le tétraèdre (donde hace una generalización al tetraedro) le llamó "punto de Lemoine". No obstante, este punto fue tratado en 1809 por LHuillier y en 1847 por Grebe, es por lo que se conoce como "punto de Grebe", en Alemania.

En 1883, M. d'Ocagne introduce el término "simediana" para la recta obtenida como reflexión de una mediana de un triángulo respecto a la correspondiente bisectriz (es decir, la mediana antiparalela de Lemoine). Es Robert Tucker quién introduce el nombre de "simediano", para el punto de concurrencia de las medianas.

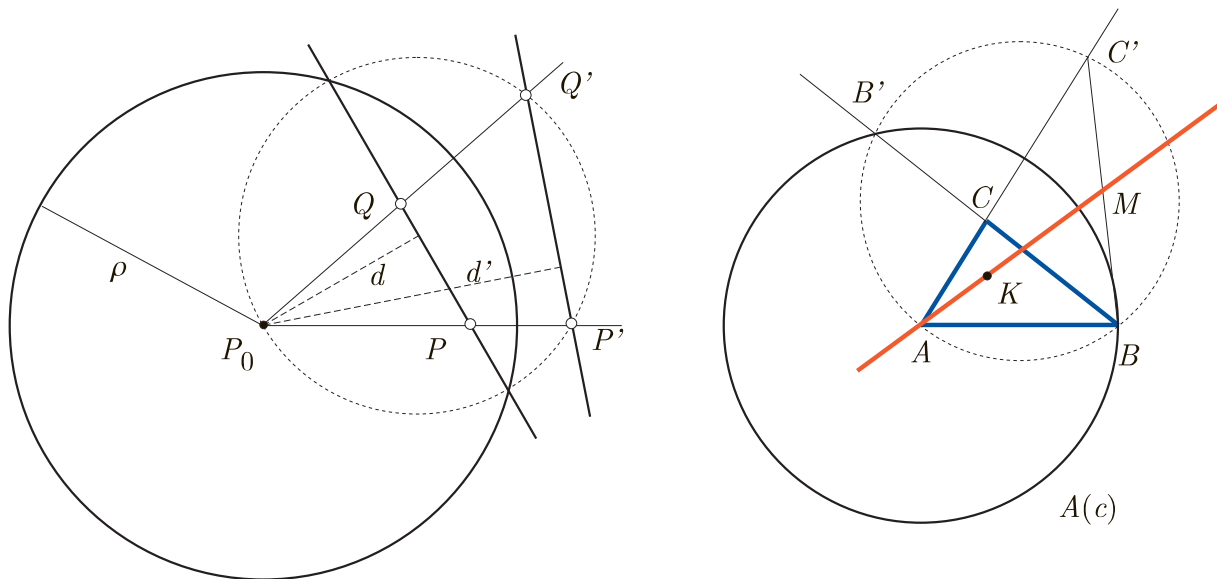
<sup>(2)</sup> Rectas antiparalelas son dos rectas que cortan a otras dos cualesquiera, de modo que los ángulos que forma una de aquellas con otra de éstas sean iguales a los que forman las otras dos.

Por lo que, bastaría con girar el lado  $CA$  un ángulo  $\theta = B$ , alrededor del vértice  $C$ ; el punto medio de  $C$  y el de intersección de la recta girada con el lado  $AB$ , está en la simediana por  $A$ , con lo que queda determinada.



Otra manera de construir la simediana, utilizando esta última propiedad de las simedianas, es mediante una inversión relativa a una circunferencia. Con tal fin necesitamos el siguiente hecho:

Las rectas  $PQ$  y  $P'Q'$ , donde  $P'$  y  $Q'$  son los inversos de  $P$  y  $Q$  respecto a una circunferencia, son antiparalelas.



En efecto, consideremos la inversión determinada por la circunferencia  $P_0(\rho)$  de centro  $P_0$  y radio  $\rho$ . Los triángulos  $\widehat{P_0PQ}$  y  $\widehat{P_0Q'P'}$  son semejantes, pues tienen un ángulo común,  $\widehat{PP_0Q} = \widehat{Q'P_0P'}$ , y se tiene la razón entre los lados correspondientes  $\frac{P_0P}{P_0Q'} = \frac{P_0Q}{P_0P'}$ , ya que  $P_0P \cdot P_0P' = P_0Q \cdot P_0Q' = \rho^2$ . ◻

Nótese que, como consecuencia de la semejanza de estos triángulos, se verifica, además, que  $\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{d}{d'}$ , siendo  $d$  y  $d'$  las distancias de  $P_0$  a las rectas  $PQ$  y  $P'Q'$ .

Para determinar la simediana por el vértice  $A$  de un triángulo  $\widehat{ABC}$ , podemos, en consecuencia, proceder de la siguiente forma:

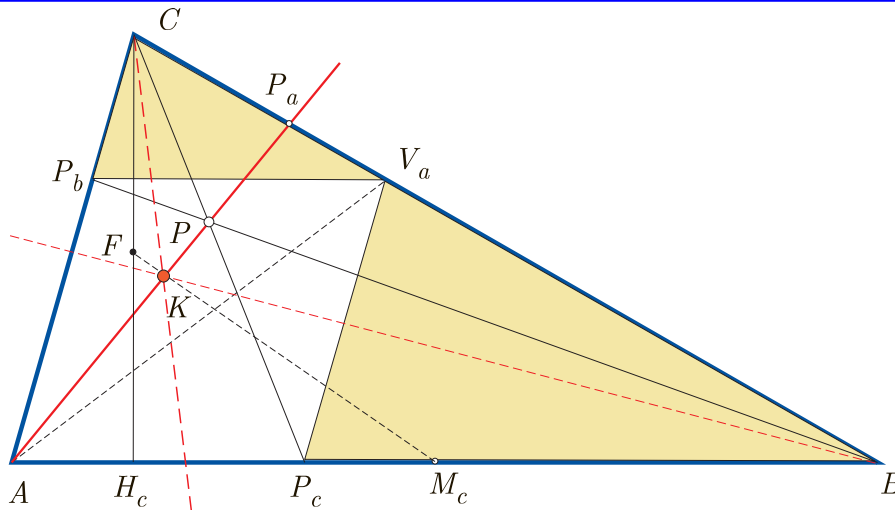
Sea la circunferencia  $A(c)$  con centro en  $A$  y que pasa por  $B$ . En la inversión relativa a la circunferencia  $A(c)$ ,  $B$  es fijo y el inverso de  $C$  es el punto  $C'$  de intersección del lado  $AC$  con la circunferencia que pasa por  $A, B$  y el punto  $B'$  de corte <sup>(1)</sup> de  $BC$  con la circunferencia de inversión. Así,  $BC'$  es antiparalela a  $BC$ .

El punto medio  $M$  de  $BC'$  está en la simediana por  $A$ , con lo que ésta queda determinada.

— . —

Otro método para construir la simediana relativa a un vértice (sea  $A$ , por ejemplo), se basa en el siguiente resultado <sup>(2)</sup>:

Las paralelas por el pie  $V_a$  de la bisectriz en  $A$  a los lados  $AB$  y  $AC$  los cortan en los puntos  $P_c$  y  $P_b$ , respectivamente. Sea  $P = BP_b \cap CP_c$ , entonces  $AP$  es la simediana por  $A$ .



Las ecuaciones de las rectas  $V_aP_b$  y  $V_aP_c$  son:

$$bx - cy + bz = 0, \quad cx + cy - bz = 0.$$

Así,  $P_b(b : 0 : c)$  y  $P_c(c : b : 0)$  y las rectas  $BP_b$  y  $CP_c$ ,

$$cx - bz = 0, \quad bx - cy = 0,$$

se cortan en  $P(bc : b^2 : c^2)$ , punto que está en la simediana por  $A$ . □

— . —

El simediano también puede ser construido usando la siguiente propiedad:

El simediano está en la recta que une el punto medio de un lado y el punto medio de la altura a ese lado.

<sup>(1)</sup> Si el triángulo  $\widehat{ABC}$  es rectángulo en  $B$ , partimos de la circunferencia  $A(b)$  con centro en  $A$  y que pasa por  $C$ .

<sup>(2)</sup> Una demostración sintética puede hacerse utilizando el Teorema de Ceva y que las simedianas son las rectas por los vértices que dividen al lado opuesto en la razón de los cuadrados de las longitudes de los lados adyacentes (pág. 51).

El Teorema de Ceva, aplicado a las cevianas de  $P$ , establece que  $\frac{AP_c}{P_cB} \cdot \frac{BP_a}{P_aC} \cdot \frac{CP_b}{P_bA} = 1$ .

Como se tiene que  $AP_b = AP_c = P_bV_a = P_cV_a = d$  y  $\widehat{ABC}$  es semejante a  $\widehat{P_bV_aC}$  y a  $\widehat{P_cBV_a}$ , se tiene, por una parte, que

$$\frac{BP_a}{P_aC} = \frac{P_cB}{AP_c} \cdot \frac{P_bA}{CP_b} = \frac{c-d}{d} \cdot \frac{d}{b-d} = \frac{c-d}{b-d}.$$

Y, por otra, que  $\frac{b}{c} = \frac{d}{b-d}$  y  $\frac{b}{c} = \frac{c-d}{d}$ ; y multiplicándolas miembro a miembro se obtiene que  $\frac{c-d}{b-d} = \frac{b^2}{c^2}$ .

En efecto, el punto medio de  $A(1 : 0 : 0)$  y  $H_a(0 : S_C : S_B)$  (pie de la altura desde  $A$ ) es  $D(a^2 : S_C : S_B)$  y como

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ 0 & 1 & 1 \\ a^2 & S_C & S_B \end{vmatrix} = a^2b^2 - a^2c^2 + a^2S_B - a^2S_C = 0,$$

poniendo  $b^2 = S_A + S_C$  y  $c^2 = S_A + S_B$ . Con lo que la recta  $M_aD$  ( $M_a$ , punto medio de  $BC$ ), contiene al simediano. Análogamente ocurre con las otras rectas  $M_bE$  y  $M_cF$ , para los puntos medios  $E$  y  $F$  de las alturas desde  $B$  y  $C$ . ◻

— . —

Otras construcciones de simedianas aparece en la página 55, haciendo uso del triángulo pedal del baricentro y también haciendo uso de que la simediana por  $A$  pasa por el vértice  $(-a^2 : b^2 : c^2)$  del triángulo isósceles levantado externamente sobre el lado  $BC$ , con ángulo en la base igual a  $A$  (pág 62).

— . —

**13.5** Una propiedad más del simediano es la siguiente:

El simediano es el único punto que es el baricentro de su propio triángulo pedal.

Para un punto  $P(u : v : w)$  los vértices de su triángulo pedal (12.48) son:

$$A_P(0 : a^2v + uS_C : a^2w + uS_B), \quad B_P(b^2u + vS_C : 0 : b^2w + vS_A), \quad C_P(c^2u + wS_B : c^2v + wS_A : 0).$$

Como las sumas de las coordenadas de estos vértices son  $a^2(u+v+w)$ ,  $b^2(u+v+w)$ ,  $c^2(u+v+w)$ , su baricentro es  $\frac{1}{a^2}A_P + \frac{1}{b^2}B_P + \frac{1}{c^2}C_P$ , con coordenadas:

$$(a^2(2b^2c^2u + c^2S_Cv + b^2S_Bw) : b^2(c^2S_Cu + 2c^2a^2v + a^2S_Aw) : c^2(b^2S_Bu + a^2S_Av + 2a^2b^2w)).$$

Para que este baricentro coincida con  $P$ , sus coordenadas han de ser iguales a  $(\lambda u, \lambda v, \lambda w)$ . Para que tenga solución el sistema homogéneo de ecuaciones, que resulta, el determinante formado por los coeficientes de sus ecuaciones, ha de ser nulo; esto ocurre cuando

$$\lambda = 3a^2b^2c^2, \quad \lambda = 2abc(3abc \pm S\sqrt{-(a^2 + b^2 + c^2)}),$$

por lo que existe una sola solución, correspondiente al valor real de  $\lambda = 3a^2b^2c^2$ :  $(a^2 : b^2 : c^2)$ , simediano de  $\triangle ABC$ . ◻

## 14 Conjugado isogonal

**14.1** Las rectas simétricas de las medianas, respecto a las bisectrices, se cortan en un punto, el simediano. Esto ocurre en general, es decir, las rectas simétricas de las cevianas de un punto  $P(u : v : w)$ , respecto a las bisectrices, se cortan en un punto  $P^*$ , denominado conjugado isogonal de  $P$ . Es claro que el conjugado isogonal de  $P^*$  es  $P$ . Se dice que las rectas  $AP$  y  $AP^*$  son conjugadas isogonales respecto a  $AB$  y  $AC$ .

Para calcular las coordenadas del conjugado isogonal de  $P(u : v : w)$ , obtenemos, primero, la expresión para el ángulo orientado  $\theta$  que el lado  $AB$  ( $z = 0$ ) forma con la ceviana  $AP$  ( $wy - vz = 0$ ), que viene dada, usando (13.53), por (ver figura en la página 50):

$$S_\theta = \frac{v+w}{w}S_A + \frac{v}{w}S_B. \quad (14.59)$$

Usando esta fórmula y (13.56), teniendo en cuenta que el ángulo que forma el lado  $AC$  con la conjugada isogonal de  $AP$  (respecto a  $AB$  y  $AC$ ) es  $\pi - \theta$ , se llega a que el punto del infinito de ésta es:

$$(S_{\pi-\theta} - S_C : b^2 : -(S_{\pi-\theta} + S_A)) = (-S_\theta - S_C : b^2 : S_\theta - S_A) = (-c^2v - b^2w : b^2w : c^2v).$$

Procediendo similarmente con las simétricas de  $BP$  y  $CP$ , respecto de las correspondientes bisectrices, se obtiene que las ecuaciones de las tres rectas conjugadas isogonales de las cevianas de  $P$  (respecto a los lados correspondientes) son

$$-c^2vy + b^2wz = 0, \quad c^2ux - a^2wz = 0, \quad -b^2ux + a^2vy = 0,$$

que se cortan en: 
$$P^*(a^2vw : b^2wu : c^2uv) = \left( \frac{a^2}{u} : \frac{b^2}{v} : \frac{c^2}{w} \right). \quad (14.60)$$

La correspondencia que a un punto  $P$  le asocia su conjugado isogonal  $P^*$  (definida en los puntos del plano, salvo en los lados del triángulo de referencia) se le conoce como transformación isogonal, que FGM [4, (p.553)] llama inversión del Capitán Mathieu (1865).

— . —

Como ejemplos de pares de puntos conjugados isogonales, a parte de los mencionados baricentro  $G(1 : 1 : 1)$  y simediano  $K(a^2 : b^2 : c^2)$ , tenemos el circuncentro  $O(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$  y el ortocentro  $H\left(\frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C}\right)$ . El incentro  $I(a : b : c)$  es conjugado isogonal de sí mismo, así como cada exincentro,  $I_a(-a : b : c)$ ,  $I_b(a : -b : c)$  e  $I_c(a : b : -c)$ .

**14.2** Una manera de construir el conjugado isogonal de un punto, sólo trazando perpendiculares, se basa en el siguiente resultado:

Las perpendiculares desde los vértices de  $\widehat{ABC}$  a los correspondientes lados del triángulo pedal de un punto  $P$ , concurren en el conjugado isogonal de  $P$ .

En efecto, (ver figura en la página 50) sea  $A'$  el pie de la perpendicular por  $A$  a  $B_P C_P$ , como los triángulos rectángulos  $\widehat{ACP}$  y  $\widehat{AA'B}$  tienen los ángulos  $\widehat{APC}$  y  $\widehat{ABP}$  iguales (por abarcar el mismo arco de circunferencia en la que están inscritos), aquellos son semejantes; por tanto,  $\widehat{PAC} = \widehat{BAA'}$  y, en consecuencia, las rectas  $AP$  y  $AA'$  son conjugadas isogonales (respecto a  $AB$  y  $AC$ ).

Para hacer la demostración usando coordenadas, con  $P(u : v : w)$ , debemos determinar el punto del infinito de la recta  $B_P C_P$ , que es

$$(c^2S_Cv - b^2S_Bw : -b^2(c^2v + S_Aw) : c^2(b^2w + S_Av)).$$

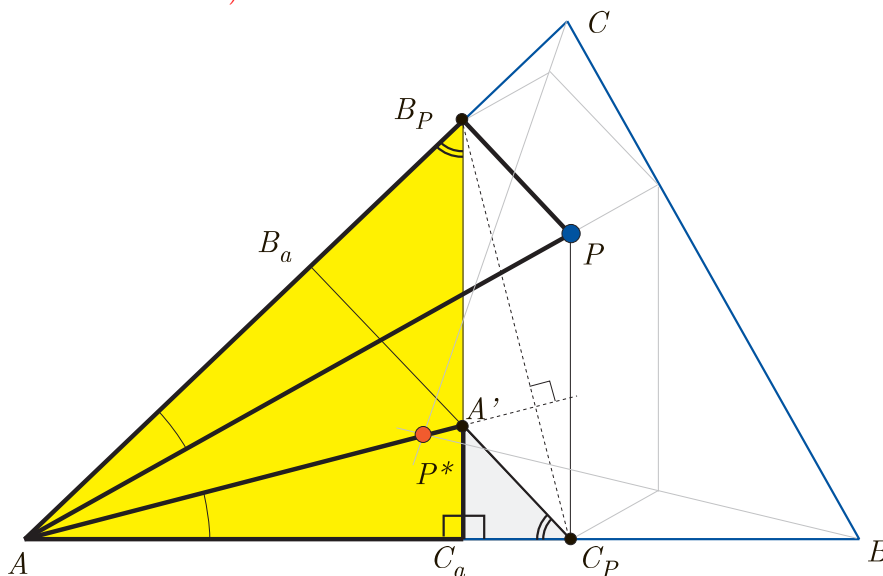
Por lo que, el punto del infinito de la recta perpendicular a  $B_P C_P$  (dado por (12.43) ó (12.44)) es  $(c^2v + b^2w : -b^2w : -c^2v)$  y la recta que lo proyecta desde  $A$  es  $c^2vy - b^2wz = 0$ , que es la conjugada isogonal de  $AP$  (respecto a  $AB$  y  $AC$ ). Similarmente, se llega a que las rectas perpendiculares por  $B$  y  $C$  a los correspondientes lados del triángulo pedal son las conjugadas isogonales de  $BP$  (respecto a  $BA$  y  $BC$ ) y de  $CP$  (respecto a  $CA$  y  $CB$ ).

— . —

Otro método, similar al anterior, para construir el conjugado isogonal de un punto  $P$ , se basa en el siguiente resultado:

Sea  $B_P P C_P A'$  el paralelogramo formado a partir de un punto  $P$  y sus pies de las perpendiculares a los lados  $AC$  y  $AB$ , entonces  $AP$  y  $AA'$  son conjugadas isogonales, respecto a  $AB$  y  $AC$ .

(Construcción con GeoGebra)



En efecto,

$$\frac{B_P P}{C_a A'} = \frac{A' C_P}{C_a A'} = \frac{B_P A}{C_a A} \Rightarrow \widehat{APB_P} \sim \widehat{AA' C_a},$$

y por tanto, las rectas  $AP$  y  $AA'$  son isogonales.

**14.3** Podemos utilizar, una vez más, el método de determinación de una recta que forma un ángulo dado con otra, para encontrar las coordenadas de los puntos de Brocard <sup>(1)</sup>, que son también conjugados isogonales:

Los puntos de Brocard  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son dos puntos, en el interior del triángulo  $\widehat{ABC}$ , tales que para cada uno de ellos, se verifica que los segmentos que lo unen con los vértices forman el mismo ángulo con los lados, es decir:

$$\widehat{AC\Omega_1} = \widehat{BA\Omega_1} = \widehat{CB\Omega_1}, \quad \widehat{AB\Omega_2} = \widehat{BC\Omega_2} = \widehat{CA\Omega_2}.$$

(Applet CabriJava)

Sea una recta  $qy + rz = 0$  que pasa por  $A$ ; el ángulo orientado  $\omega_1$  que el lado  $AB$  forma con ella es el ángulo  $\theta_c$  que está dado por las fórmulas (13.55):

$$\cotag \omega_1 = \frac{(q - r)S_A - rS_B}{qS}.$$

Vamos a determinar la recta que pasa por  $B$  y tal que el lado  $BC$  ( $x = 0$ ) forme con ella un ángulo igual a  $\omega_1$ . El punto del infinito de tal recta, usando (13.56), es  $(a^2 : -(S_{\omega_1} + S_C) : S_{\omega_1} - S_B)$  por lo tiene por ecuación:

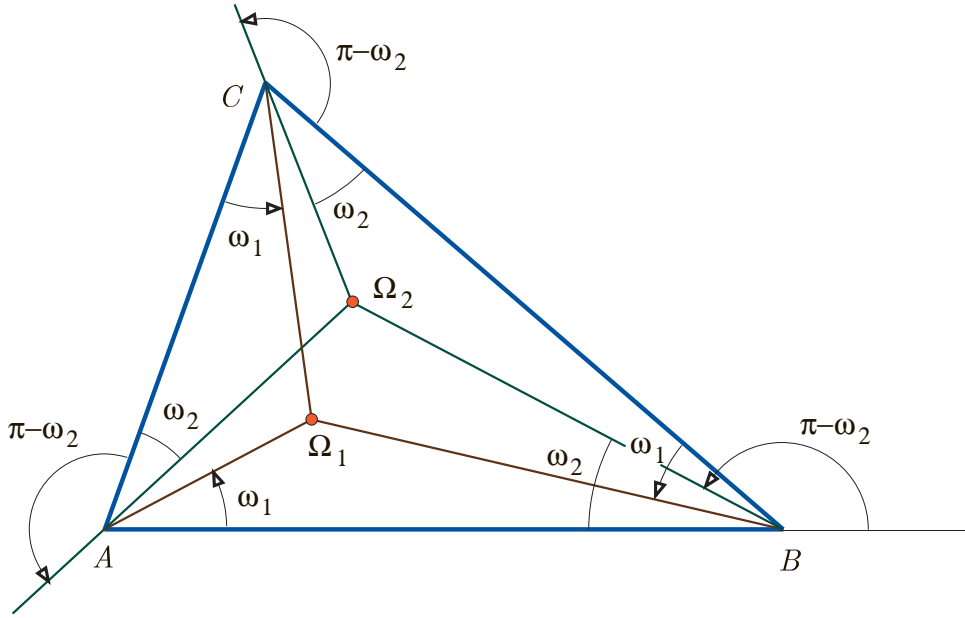
$$(S_{\omega_1} - S_B)x + a^2z = 0 \quad \text{o bien} \quad (q(S_A - S_B) - rc^2)x - a^2z = 0.$$

Análogamente, la recta por el vértice  $C$  tal que  $CA$  ( $y = 0$ ) forme con ella un ángulo igual a  $\omega_1$  es la que tiene por ecuación

$$b^2qx + (rc^2 - q(S_A - S_C))y = 0.$$

<sup>(1)</sup> Henri Brocard (1845 - 1922)





Estas tres rectas son concurrentes si

$$\begin{vmatrix} 0 & q & r \\ q(S_A - S_B) - rc^2 & 0 & -a^2q \\ b^2q & rc^2 - q(S_A - S_C) & 0 \end{vmatrix} = (a^2q + c^2r)(b^2q^2 + a^2qr - b^2qr - c^2qr + c^2r^2) = 0.$$

Tomando los valores de  $q = c^2$  y  $r = -a^2$ , que anulan al primer factor, obtenemos que las tres rectas

$$c^2y - a^2z = 0, \quad b^2x - a^2z = 0, \quad b^2x - c^2y = 0,$$

concurren en el primer punto de Brocard

$$\Omega_1(a^2c^2 : b^2a^2 : c^2b^2) = \left( \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2} \right).$$

Si ahora  $\pi - \omega_2$  es el ángulo orientado que el lado  $AC$  forma con la rectas  $qy + rz$ , que pasa por  $A$ , se obtiene, utilizando de nuevo las fórmulas (13.55), que:

$$\cotag(\pi - \omega_2) = \frac{qS_C - (r - q)S_A}{rS}.$$

La recta por  $B$ , tal que el ángulo que  $AB$  forma con ella es  $\pi - \omega_2$ , tiene punto del infinito  $(S_{\omega_2} - S_B : -S_{\omega_2} - S_A : c^2)$  y ecuación

$$c^2rx + (r(-S_A + S_B) + b^2q)z = 0.$$

Y, finalmente, el lado  $BC$  forma un ángulo de  $\pi - \omega_2$  con la recta que pasa por  $C$ , tiene punto del infinito  $(a^2 : S_{\omega_2} - S_C : -S_{\omega_2} - S_B)$  y ecuación

$$(r(-S_A + S_C) + b^2q)x + a^2ry = 0.$$

La condición para que estas tres rectas sean concurrentes (el determinante formado por sus coeficientes se anule) es

$$(b^2q + a^2r)(b^2q^2 + a^2qr - b^2qr - c^2qr + c^2r^2) = 0.$$

Para los valores de  $q = a^2$  y  $r = -b^2$ , que anulan al primer factor, se obtienen que las tres rectas

$$a^2y - b^2z = 0, \quad c^2x - b^2z = 0, \quad c^2x - a^2y = 0,$$

las cuales concurren en el segundo punto de Brocard

$$\Omega_2(a^2b^2 : b^2c^2 : c^2a^2) = \left( \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} \right).$$

Claramente, los puntos de Brocard  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  (en la página 117, se da una construcción de ellos) son conjugados isogonales.

Nótese que los valores de  $q$  y  $r$  que anulan el segundo factor del determinante, formado por los coeficientes de las tres rectas que forman ángulos iguales con los lados del triángulo, en ambos casos, dan lugar a soluciones imaginarias para la recta  $qy + rz = 0$ ; de hecho se obtiene las rectas  $c^2y + (S_A \pm iS)z = 0$ .

Los ángulos  $\omega_1$  y  $\omega_2$  que las rectas por  $A$  obtenidas,  $c^2y - a^2z = 0$  y  $a^2y - b^2z = 0$ , forman con los lados  $AB$  y  $AC$ , respectivamente, coinciden y lo denotamos por  $\omega$  y se le conoce por ángulo de Brocard:

$$\cotag \omega_1 = \frac{(c^2 + a^2)S_A + a^2S_B}{c^2S} = \frac{c^2S_A + a^2c^2}{c^2S} = \frac{1}{S}(S_A + S_B + S_C).$$

$$\cotag \omega_2 = -\cotag(\pi - \omega_2) = -\frac{a^2S_C - (-b^2 - a^2)S_A}{-b^2S} = \frac{a^2b^2 + b^2S_A}{b^2S} = \frac{1}{S}(S_A + S_B + S_C).$$

$$\boxed{\cotag \omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2S} = \cotag A + \cotag B + \cotag C} \quad (14.61)$$

**14.4** Los puntos de Brocard no son centros de un triángulo del tipo de la ETC, Enciclopedia de Kimberling, (ellos forman un par bicéntrico, ver página 23); sin embargo, puntos contenidos en la recta que ellos determinan, tales como su punto medio y punto del infinito sí son centros. Estos son los puntos  $X_{39}$  y  $X_{512}$  y sus respectivas coordenadas son:

$$(a^2(b^2 + c^2) : b^2(c^2 + a^2) : c^2(a^2 + b^2)) = (\sen A \sen(A + \omega) : \sen B \sen(B + \omega) : \sen C \sen(C + \omega)),$$

$$(a^2(b^2 - c^2) : b^2(c^2 - a^2) : c^2(a^2 - b^2)).$$

Para obtener las expresiones de las coordenadas en función de los ángulos, se ha utilizado (2.4) y que

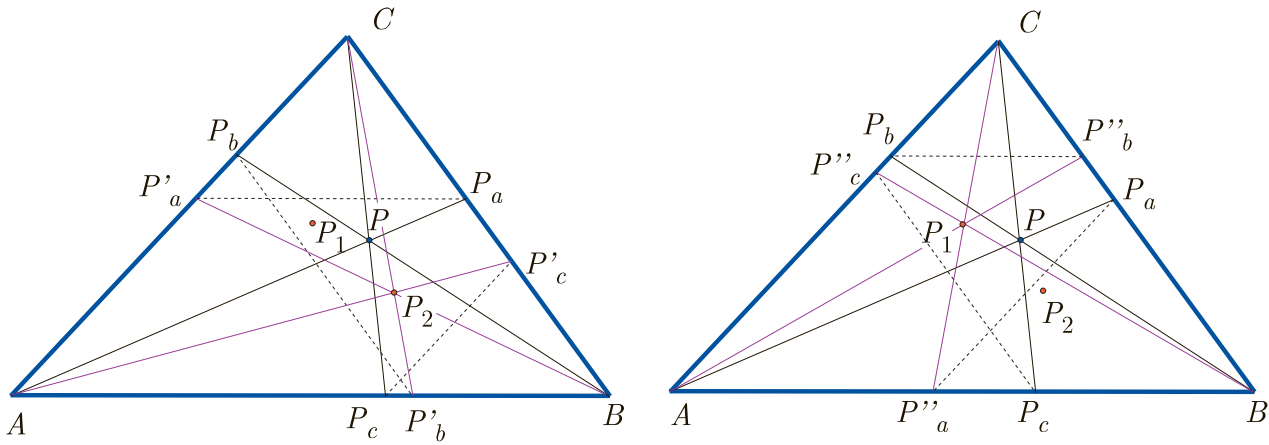
$$S_A + S_\omega = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = b^2 + c^2.$$

P. Yiu [20]. §8.4, da una generalización de los puntos de Brocard, que llama brocardianos.

Dado un punto  $P(u : v : w)$ , en coordenadas baricéntricas relativas al triángulo  $\widehat{ABC}$ , los brocardianos de  $P$  son los puntos

$$P_1 \left( \frac{1}{v} : \frac{1}{w} : \frac{1}{u} \right), \quad P_2 \left( \frac{1}{w} : \frac{1}{u} : \frac{1}{v} \right).$$

Su construcción se muestra en las siguientes figuras



Sean  $P_a(0 : v : w)$ ,  $P_b(u : 0 : w)$  y  $P_c(u : v : 0)$  los pies de la cevianas de  $P$ .

La paralela,  $wx + wy - vz = 0$ , por  $P_a$  a  $AB$  corta a  $CA$  en  $P'_a(v : 0 : w) = (1/w : 0 : 1/v)$ .

La paralela,  $-wx + uy + uz = 0$ , por  $P_b$  a  $BC$  corta a  $AB$  en  $P'_b(u : w : 0) = (1/w : 1/u : 0)$ .

La paralela,  $vx - uy + vz = 0$ , por  $P_c$  a  $CA$  corta a  $BC$  en  $P'_c(0 : v : u) = (0 : 1/u : 1/v)$ .

Por tanto, los puntos  $P'_a, P'_b, P'_c$  son los pies de las cevianas de  $P_1 \left( \frac{1}{v} : \frac{1}{w} : \frac{1}{u} \right)$ .

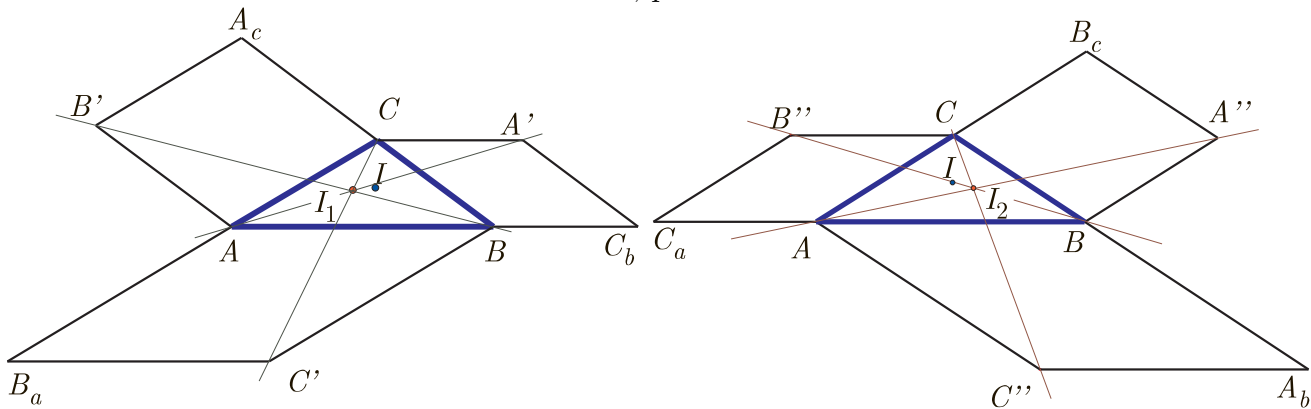
Similarmente, trazando paralelas por  $P_a, P_b$  y  $P_c$  a los lados  $CA, AB$  y  $BC$ , respectivamente, se obtienen los tres puntos  $P''_a(1/v : 1/w : 0)$ ,  $P''_b(0 : 1/w : 1/u)$  y  $P''_c(1/v : 0 : 1/u)$ , que son los pies de las cevianas de  $P_2 \left( \frac{1}{w} : \frac{1}{u} : \frac{1}{v} \right)$ .

Los puntos de Brocard son los brocardianos del simendiano  $K(a^2 : b^2 : c^2)$ .

Los puntos de Jerabek son los brocardianos del incentro:

Si construimos rombos exteriormente sobre los lados de  $\widehat{ABC}$ , como aparecen en las figuras siguientes.

Sobre el lado  $BC$  construimos el rombo tal que uno de los lados esté en la prolongación de  $AB$ . Para construir los rombos sobre los otros lados, procedemos cíclicamente.



Si  $A', B'$  y  $C'$  son los vértices opuestos, en estos rombos, a los vértices  $B, C$  y  $A$ , respectivamente. Entonces, las rectas  $AA', BB', CC'$  son concurrentes en el punto  $I_1 = (1/b : 1/c : 1/a)$ .

Ahora, sobre el lado  $BC$ , construimos el rombo tal que uno de los lados esté en la prolongación de  $AC$ , y completamos la construcción de los otros rombos cíclicamente.

Si  $A'', B''$  y  $C''$  son los vértices opuestos, en estos rombos, a los vértices  $C, A$  y  $B$ , respectivamente. Entonces, las rectas  $AA'', BB'', CC''$  son concurrentes en el punto  $I_2 = (1/c : 1/a : 1/b)$ .

Los puntos  $I_1$  e  $I_2$  se llaman puntos de Jerabek, forman un par bicéntrico y son los puntos brocardianos del incentro  $I = (a : b : c)$ .

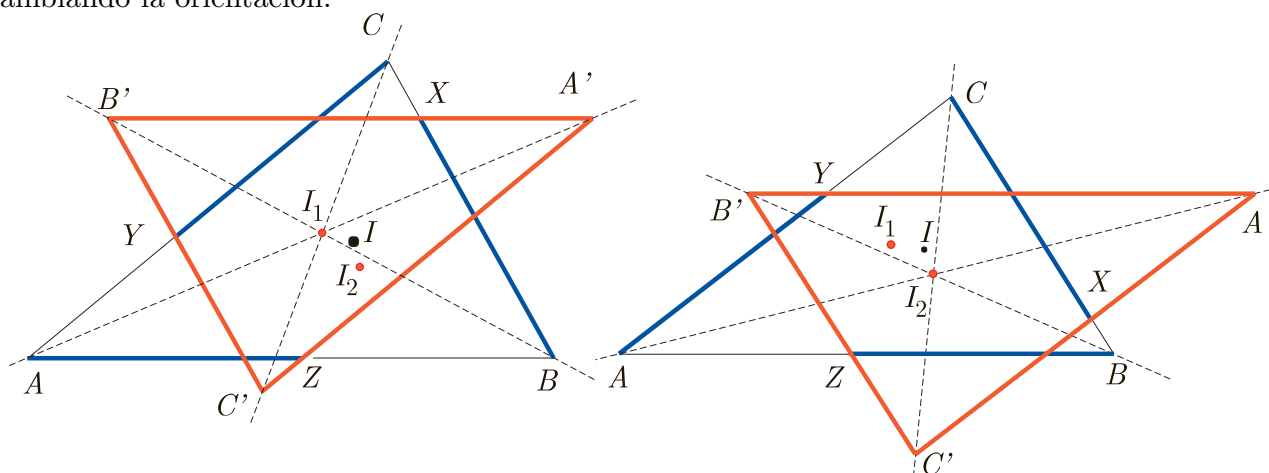
Para la comprobación de estos hechos, debemos tener en cuenta que, por ejemplo, para el segundo caso,  $C_a(b + c : -b : 0)$ ,  $A_b(0 : a + c : -c)$ ,  $B_c(-a : 0 : a + b)$ ; el punto medio de  $C_aC$  es

$(b + c : -b : c)$  y el simétrico, respecto a éste, de  $A$  es  $B''(b : -b : c)$ . Análogamente, se obtienen  $C''(a : c : -c)$  y  $A''(-a : b : a)$ . Es inmediato ahora comprobar que las rectas  $AA''$ ,  $BB''$  y  $CC''$  concurren en  $I_2(ab : bc : ac)$ .

De forma similar, para el primer caso, se llega a que las rectas  $AA'$ ,  $BB'$  y  $CC'$  concurren en  $I_1(ac : ab : bc)$ .

Otra interpretación geométrica de los puntos de Jerabek:

Si en cada lado de un triángulo tomamos segmentos iguales y con la misma orientación, las paralelas a los lados por el extremo de estos segmentos determinan un triángulo homotético a  $\triangle ABC$ . El centro de homotecia es uno de los dos puntos de Jerabek del triángulo. El otro se obtiene cambiando la orientación.



Para el primer caso, que se muestra en la primera figura anterior, tenemos que:

$$X(0 : a - t : t), \quad Y(t : 0 : b - t), \quad Z(c - t : t : 0).$$

Y las paralelas a  $AB$  por  $X$ , a  $BC$  por  $Y$  y a  $CA$  por  $Z$  son, respectivamente:

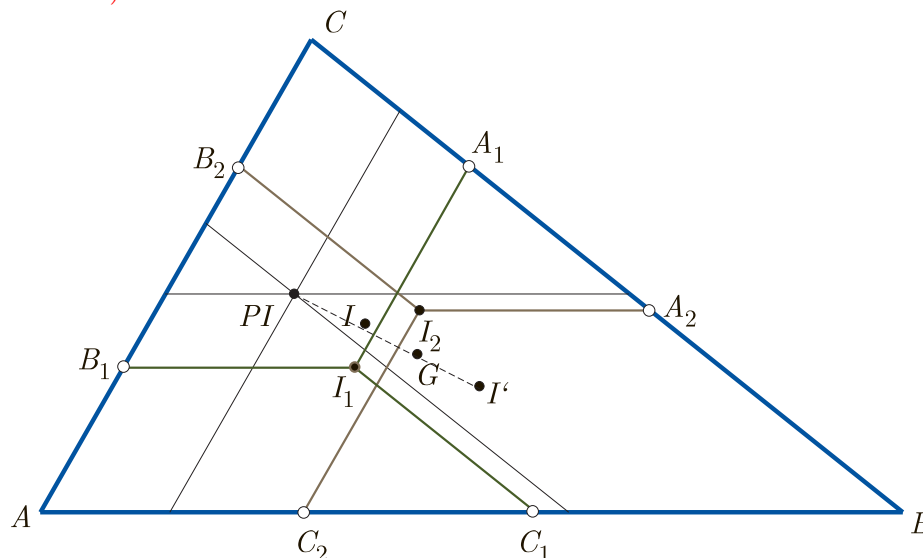
$$-tx - ty + (a - t)z = 0, \quad (b - t)x - ty - tz = 0, \quad -tx + (c - t)y - tz = 0.$$

Estas rectas se cortan, dos a dos, en los puntos:

$$A'(ct + a(-c + t) : -at : -ct), \quad B'(-at : bt + a(-b + t) : -bt), \quad C'(-ct : -bt : ct + b(-c + t)).$$

Y los triángulos  $\triangle A'B'C'$  y  $\triangle ABC$  son perspectivas, con centro de perspectiva en  $I_1(ac : ab : bc)$ , primer brocardiano del incentro  $I$ .

(Applet CabriJava)



Las paralelas a través de  $I_1$  a  $AB, BC$  y  $CA$  cortan a  $CA, AB$  y  $BC$  en los puntos  $B_1, C_1$  y  $A_1$ , respectivamente; entonces, como  $I_1(ca : ab : bc)$  se tiene

$$I_1A_1 = b \frac{ca}{bc + ca + ab}, \quad I_1B_1 = c \frac{ab}{bc + ca + ab}, \quad I_1C_1 = a \frac{bc}{bc + ca + ab}.$$

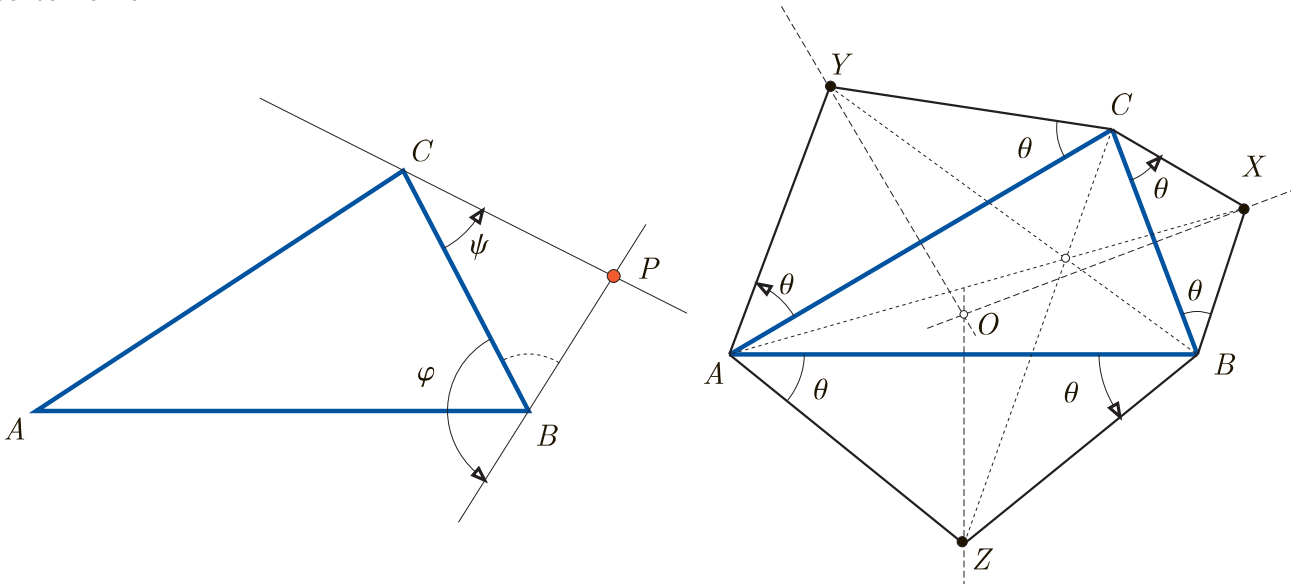
Análogamente, si las paralelas por  $I_2(ab : bc : ca)$  a los lados  $AB, BC$  y  $AC$  cortan a  $BC, CA$  y  $AB$  en los puntos  $A_2, B_2$  y  $C_2$ , respectivamente, también se tiene la igualdad de las siguientes magnitudes:

$$I_2A_2 = c \frac{ab}{bc + ca + ab}, \quad I_2B_2 = a \frac{bc}{bc + ca + ab}, \quad I_2C_2 = b \frac{ca}{bc + ca + ab}.$$

Estas seis magnitudes son iguales y coinciden con la mitad de la longitud de los segmentos que las paralelas a los lados por el punto de paralelas iguales (pág. 5), comprendidos entre los lados del triángulo de referencia.

## 15 Fórmula de Conway. Centros de perspectividad de Kiepert

**15.1** Un punto  $P$  queda determinado por los ángulos que debemos girar un lado desde los dos vértices del triángulo de referencia, que determinan dicho lado, para que las rectas resultantes se corten en él.



Sean  $\varphi$  y  $\psi$  los ángulos orientados que forman el lado  $BC$  con las rectas  $BP$  y  $CP$ , respectivamente. Para determinar los puntos del infinito de  $BP$  y  $CP$ , usamos (13.56) sustituyendo  $\theta$  por  $\varphi$  ó  $\psi$  y poniendo  $p = 1, q = 0$  y  $r = 0$  (coeficientes de la ecuación  $x = 0$  de la recta  $BC$ ) y nos da, respectivamente,

$$(a^2 : -(S_\varphi + S_C) : S_\varphi - S_B), \quad (a^2 : -(S_\psi + S_C) : S_\psi - S_B).$$

Así, las rectas  $BP$  y  $CP$  y su punto de intersección son:

$$(S_\varphi - S_B)x - a^2z = 0, \quad (S_\psi + S_C)x + a^2y = 0,$$

$$P(-a^2 : S_C + S_\psi : S_B - S_\varphi). \quad (15.62)$$

La fórmula de Conway <sup>(1)</sup> es la que da estas coordenadas de un punto  $P$ , en términos de los ángulos orientados  $\varphi$  y  $\psi$  que el lado  $BC$  forma con  $BP$  y  $CP$ , respectivamente.

**15.2** Como ejemplo del empleo de la fórmula de Conway, vamos a obtener algunos puntos notables del triángulo, que son los centros de perspectividad del triángulo de referencia y de ciertos triángulos con sus vértices en las mediatrices de aquél. Estos centros son casos particulares de los centros de perspectividad de Jacobi que aparecen en § 16.

Tomemos tres puntos  $X, Y$  y  $Z$  en las mediatrices de  $BC, CA$  y  $AC$ , respectivamente, del triángulo de referencia, de tal forma que los ángulos orientados que forman  $\widehat{CB}$  con  $\widehat{CX}$ ,  $\widehat{AC}$  con  $\widehat{AY}$  y  $\widehat{BA}$  con  $\widehat{BZ}$  coincidan; es decir, los triángulos levantados sobre los lados,  $\widehat{BCX}$ ,  $\widehat{CAY}$  y  $\widehat{ABZ}$  sean semejantes. Sus coordenadas serán, por tanto, si  $\theta$  es el ángulo común:

$$X(-a^2 : S_C + S_\theta : S_B + S_\theta), \quad Y(S_C + S_\theta : -b^2 : S_A + S_\theta), \quad Z(S_B + S_\theta : S_A + S_\theta : -c^2).$$

Las coordenadas de estos puntos se pueden poner en la forma siguiente:

$$X\left( ** : \frac{1}{S_B + S_\theta} : \frac{1}{S_C + S_\theta} \right), \quad Y\left( \frac{1}{S_A + S_\theta} : ** : \frac{1}{S_C + S_\theta} \right), \quad Z\left( \frac{1}{S_A + S_\theta} : \frac{1}{S_B + S_\theta} : ** \right).$$

Por lo que los triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{XYZ}$  son perspectivos; es decir, las rectas  $AX, BY$  y  $CZ$  concurren en el punto de coordenadas

$$K(\theta) = \left( \frac{1}{S_A + S_\theta} : \frac{1}{S_B + S_\theta} : \frac{1}{S_C + S_\theta} \right), \tag{15.63}$$

conocido como centro de perspectiva o centro de perspectividad de Kiepert. A  $\widehat{XYZ}$  se le denomina triángulo de Kiepert y su baricentro el mismo que de  $\widehat{ABC}$ , ya que la suma de las coordenadas de cada uno de sus vértices es la misma,  $2S_\theta$ , y  $X + Y + Z = 2S_\theta(1 : 1 : 1)$ .

Por las dos últimas relaciones de (2.4), el punto obtenido (15.63) se puede poner de la forma:

$$K(\theta) = \left( \frac{\text{sen } A}{\text{sen}(A + \theta)} : \frac{\text{sen } B}{\text{sen}(B + \theta)} : \frac{\text{sen } C}{\text{sen}(C + \theta)} \right).$$

**15.3** Algunos centros de perspectividad de Kiepert para valores particulares del ángulo  $\theta$ : <sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup> La fórmula de Conway aparece normalmente en la literatura bajo la forma

$$(-a^2 : S_C + S_\psi : S_B + S_\varphi).$$

Esto es debido a que se toman el signo de los ángulos  $\widehat{PBC}$  y  $\widehat{PCB}$  positivo o negativo, según que  $P$  esté en el mismo o distinto semiplano que  $A$ , respecto a la recta  $BC$ . Aquí estamos tomando, por ejemplo,  $\varphi$  como el ángulo orientado (en el sentido contrario a las agujas del reloj) formado por el par ordenado de rectas  $(BC, BP)$ .

<sup>(2)</sup> Todos ellos contenidos en la hipérbola de Kiepert, hipérbola equilátera (contiene al ortocentro) circunscrita a  $\widehat{ABC}$ , que contienen al baricentro y que es el lugar geométrico de todos los centros de perspectividad de Kiepert. Su ecuación se obtiene eliminando  $\lambda$  y  $S_\theta$  entre las ecuaciones

$$\lambda x = \frac{1}{S_A + S_\theta}, \quad \lambda y = \frac{1}{S_B + S_\theta}, \quad \lambda z = \frac{1}{S_C + S_\theta},$$

resultando:

$$(b^2 - c^2)yz + (c^2 - a^2)zx + (a^2 - b^2)xy = 0.$$

El centro de esta hipérbola  $((b^2 - c^2)^2 : (c^2 - a^2)^2 : (a^2 - b^2)^2)$  está en la circunferencia de los nueve puntos y es el  $X_{115}$  en ETC. Sus asíntotas son las rectas de Simson–Wallace de los puntos en que el eje de Brocard,  $OK$ , corta a la circunferencia circunscrita.

Los centros de perspectividad de Kiepert  $K(\theta)$  y  $K(\pi/2 - \theta)$  están alineados con el circuncentro, y los puntos de contacto de las tangentes desde el circuncentro a la hipérbola de Kiepert son los puntos de Vecten (pág. 64).

Los conjugados isogonales de ciertos centros de perspectividad de Kiepert serán tratados en § 16.

El eje de perspectividad de  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{XYZ}$ , cuando  $\theta$  varía, envuelve la parábola inscrita de Kiepert , (<http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2361.pdf>, pág 5).

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2}$$

Los puntos  $X, Y$  y  $Z$  son los puntos del infinito de las perpendiculares

(12.45) a los correspondientes lados opuestos a los vértices  $A, B$  y  $C$  y, por tanto, el centro de perspectividad de Kiepert es el ortocentro.

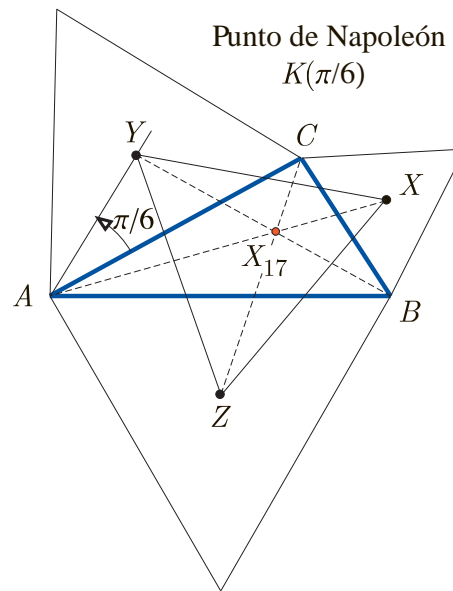
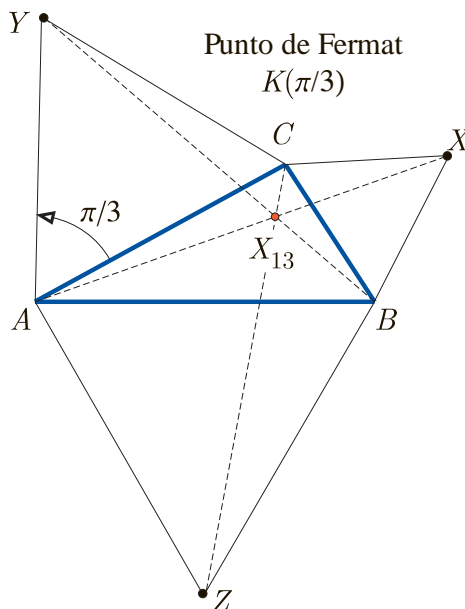
$$\theta = \pm \frac{\pi}{3}$$

En este caso, los triángulos levantados externamente (resp. internamente) sobre los lados son equiláteros, teniéndose que las coordenadas de los vértices  $X, Y$  y  $Z$  son:

$$\left(-a^2 : S_C \pm \frac{S}{\sqrt{3}} : S_B \pm \frac{S}{\sqrt{3}}\right), \left(S_C \pm \frac{S}{\sqrt{3}} : -b^2 : S_A \pm \frac{S}{\sqrt{3}}\right), \left(S_B \pm \frac{S}{\sqrt{3}} : S_A \pm \frac{S}{\sqrt{3}} : -c^2\right).$$

Y el centro de perspectividad de  $\widehat{ABC}$  y los triángulos  $\widehat{XYZ}$  son los puntos de Fermat <sup>(1)</sup> ( $X_{13}$  y  $X_{14}$  de ETC), también conocido como puntos isogónicos:

$$K\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}S_A \pm S} : \frac{1}{\sqrt{3}S_B \pm S} : \frac{1}{\sqrt{3}S_C \pm S}\right).$$



$$\theta = \pm \frac{\pi}{6}$$

En este caso, levantamos externamente (resp. internamente) sobre los lados triángulos equiláteros y los puntos  $X, Y$  y  $Z$  son sus centros de simetría:

$$\left(-a^2 : S_C \pm \sqrt{3}S : S_B \pm \sqrt{3}S\right), \left(S_C \pm \sqrt{3}S : -b^2 : S_A \pm \sqrt{3}S\right), \left(S_B \pm \sqrt{3}S : S_A \pm \sqrt{3}S : -c^2\right),$$

que forman un triángulo equilátero <sup>(2)</sup> (Teorema de Napoleón), y los correspondientes centros de

<sup>(1)</sup> El primer punto de Fermat (que corresponde al caso en que los triángulos equiláteros son levantados exteriormente) es el único punto  $X$  que minimiza la suma de distancias  $AX + BX + CX$ .

(<http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2295.pdf>).

<sup>(2)</sup> Las coordenadas baricéntricas absolutas de los centros de los triángulos equiláteros levantados exteriormente son

$$X \left(-\frac{S_B + S_C}{2\sqrt{3}S}, \frac{S_C + \sqrt{3}S}{2\sqrt{3}S}, \frac{S_B + \sqrt{3}S}{2\sqrt{3}S}\right),$$

perspectividad de Kiepert son los puntos de Napoleón ( $X_{17}$  y  $X_{18}$  de ETC):

$$K(\pm \frac{\pi}{6}) \left( \frac{1}{S_A \pm \sqrt{3}S} : \frac{1}{S_B \pm \sqrt{3}S} : \frac{1}{S_C \pm \sqrt{3}S} \right).$$

$$\theta = \pm \frac{\pi}{4}$$

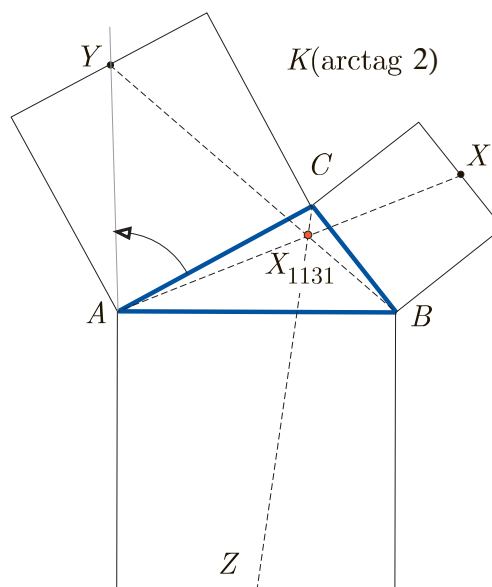
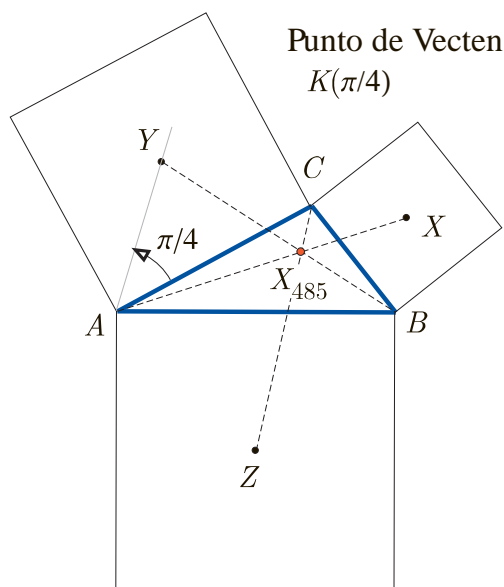
Si se construyen externamente (resp. internamente) cuadrados sobre los

lados del triángulo de referencia, los puntos  $X, Y$  y  $Z$  son sus centros de simetría:

$$\left( -a^2 : S_C \pm S : S_B \pm S \right), \left( S_C \pm S : -b^2 : S_A \pm S \right), \left( S_B \pm S : S_A \pm S : -c^2 \right).$$

Los correspondientes centros de perspectiva de Kiepert son los puntos de Vecten ( $X_{485}$  y  $X_{486}$  de ETC):

$$K(\pm \frac{\pi}{4}) \left( \frac{1}{S_A \pm S} : \frac{1}{S_B \pm S} : \frac{1}{S_C \pm S} \right).$$



$$\theta = \pm \arctag 2$$

En este caso, levantamos externamente (resp. internamente) sobre los

lados cuadrados y los puntos  $X, Y$  y  $Z$  son los puntos medios de los lados que no tienen vértices comunes con el triángulo de referencia:

$$\left( -2a^2 : 2S_C \pm S : 2S_B \pm S \right), \left( 2S_C \pm S : -2b^2 : 2S_A \pm S \right), \left( 2S_B \pm S : 2S_A \pm S : -2c^2 \right).$$

Y los correspondientes centros de perspectiva de Kiepert son ( $X_{1131}$  y  $X_{1132}$  de ETC):

$$K(\pm \arctag 2) \left( \frac{1}{2S_A \pm S} : \frac{1}{2S_B \pm S} : \frac{1}{2S_C \pm S} \right).$$

$$Y \left( \frac{S_C + \sqrt{3}S}{2\sqrt{3}S}, -\frac{S_A + S_C}{2\sqrt{3}S}, \frac{S_A + \sqrt{3}S}{2\sqrt{3}S} \right), Z \left( \frac{S_B + \sqrt{3}S}{2\sqrt{3}S}, \frac{S_A + \sqrt{3}S}{2\sqrt{3}S}, -\frac{S_A + S_B}{2\sqrt{3}S} \right).$$

$$XY^2 = S_A \frac{(S_B + 2S_C + \sqrt{3}S)^2}{12S^2} + S_B \frac{(S_A + 2S_C + \sqrt{3}S)^2}{12S^2} + S_C \frac{(S_A - S_B)^2}{12S^2} = \frac{1}{3}(S_A + S_B + S_C + \sqrt{3}S).$$

Las magnitudes  $YZ^2$  y  $ZX^2$  también dan este valor.



$$\theta = \pm \arctag 3$$

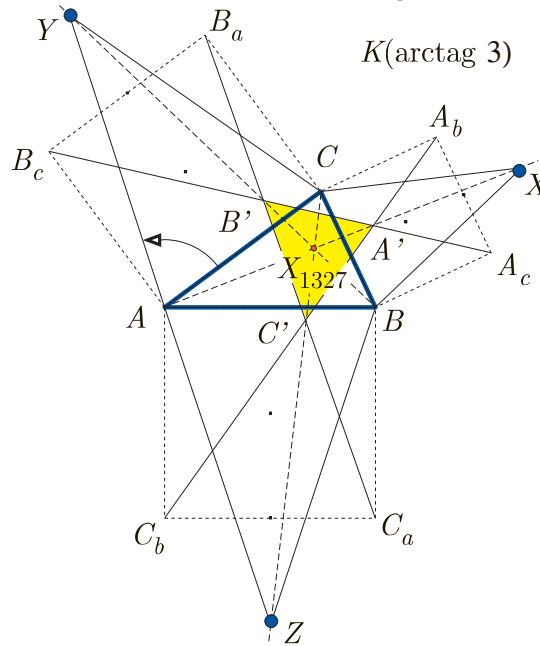
En este caso, levantamos externamente (resp. internamente) sobre los lados cuadrados y los puntos  $X, Y$  y  $Z$  son los simétricos de los centros de cada cuadrado respecto a su lado que no tienen vértices comunes con el triángulo de referencia:

$$\left(-3a^2 : 3S_C \pm S : 3S_B \pm S\right), \left(3S_C \pm S : -3b^2 : 3S_A \pm S\right), \left(3S_B \pm S : 3S_A \pm S : -3c^2\right).$$

Y los correspondientes centros de perspectividad de Kiepert son ( $X_{1327}$  y  $X_{1328}$  de ETC):

$$K(\pm \arctag 3) \left(\frac{1}{3S_A \pm S} : \frac{1}{3S_B \pm S} : \frac{1}{3S_C \pm S}\right).$$

Estos centros de perspectividad tiene, también, la siguiente interpretación geométrica, utilizando los cuadrados levantados sobre los lados del triángulo:



Designemos por  $A_b$  y  $A_c$  los vértices opuestos a los  $B$  y  $C$ , respectivamente, del cuadrado levantado sobre el lado  $BC$  y, de manera análoga, son designados los vértices  $B_c, B_a, C_a$  y  $C_b$ . Ocurre entonces que los puntos

$$A' = A_bC_b \cap B_cA_c, \quad B' = B_cA_c \cap C_aB_a, \quad C' = C_aB_a \cap A_bC_b,$$

forman un triángulo perspectivo con  $\widehat{ABC}$  con centro de perspectividad los considerados en este caso (según que los cuadrados estén levantado internamente o externamente sobre los lados de  $\widehat{ABC}$ ).

Esto surge de que las coordenadas de  $A_b$  son, usando la fórmula de Conway (15.62) para  $\psi = \pi/2$  y  $\varphi = \pi - \pi/4$ ,  $A_b(-a^2 : S_C : S_B + S)$ . Para las de  $A_c$ , ponemos  $\psi = \pi/4$  y  $\varphi = \pi/2$ , con lo que  $A_c(-a^2 : S_C + S : S_B)$ . Análogamente, se obtienen el resto de coordenadas:

$$\begin{aligned} A_b(-a^2 : S_C : S_B + S), & \quad A_c(-a^2 : S_C + S : S_B) \\ B_c(S_C + S : -b^2 : S_A), & \quad B_a(S_C : -b^2 : S_A + S) \\ C_a(S_B : S_A + S : -c^2), & \quad C_b(S_B + S : S_A : -c^2). \end{aligned}$$

La ecuación de la recta  $A_bC_b$  es

$$(-SS_A - S_AS_B - c^2S_C)x + (-a^2c^2 + (S + S_B)^2)y + (-a^2S_A - (S + S_B)S_C)z = 0,$$

y usando las fórmulas (2.3), se puede poner de la forma:

$$(SS_A + S_A S_B + (S_A + S_B)S_C)x - ((S + S_B)^2 - (S_A + S_B)(S_B + S_C))y + ((S + S_B)S_C + S_A(S_B + S_C))z = 0.$$

Procediendo de la mismas forma para hallar las ecuaciones de las rectas  $B_c A_c$  y  $C_a B_a$ , se llega a que:

$$A_b C_b : (S_A + S)x - 2S_B y + (S_C + S)z = 0,$$

$$B_c A_c : (S_A + S)x + (S_B + S)y - 2S_C z = 0,$$

$$C_a B_a : -2S_A x + (S_B + S)y + (S_C + S)z = 0.$$

Resolviendo las dos primeras nos da el punto  $A'$ :

$$A' \left( \left( \begin{array}{cc|c} -2S_B & S_C + S & \\ S_B + S & -2S_C & \end{array} \right) : - \left( \begin{array}{cc|c} S_A + S & S_C + S & \\ S_A + S & -2S_C & \end{array} \right) : \left( \begin{array}{cc|c} S_A + S & -2S_B & \\ S_A + S & S_B + S & \end{array} \right) \right).$$

$$A'(-S^2 - SS_B - SS_C + 3S_B S_C : (S + S_A)(S + 3S_C) : (S + S_A)(S + 3S_B)).$$

Resolviendo los otros dos pares de ecuaciones, encontramos las coordenadas de los puntos  $B'$  y  $C'$ . Los tres se pueden poner de la forma:

$$A' \left( ** : \frac{1}{3S_B + S} : \frac{1}{3S_C + S} \right), B' \left( \frac{1}{3S_B + S} : ** : \frac{1}{3S_C + S} \right), C' \left( \frac{1}{3S_A + S} : \frac{1}{3S_B + S} : ** \right).$$

Con lo que los triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{A'B'C'}$  son perspectivos (pág. 10) con centro de perspectividad

$$\left( \frac{1}{3S_A + S} : \frac{1}{3S_B + S} : \frac{1}{3S_C + S} \right).$$

El punto de Vecten exterior de  $\widehat{ABC}$  es el punto interior de Vecten de  $\widehat{A'B'C'}$  (Jean-Louis Ayme, Hyacinthos Message#17406, <http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2353.pdf>).

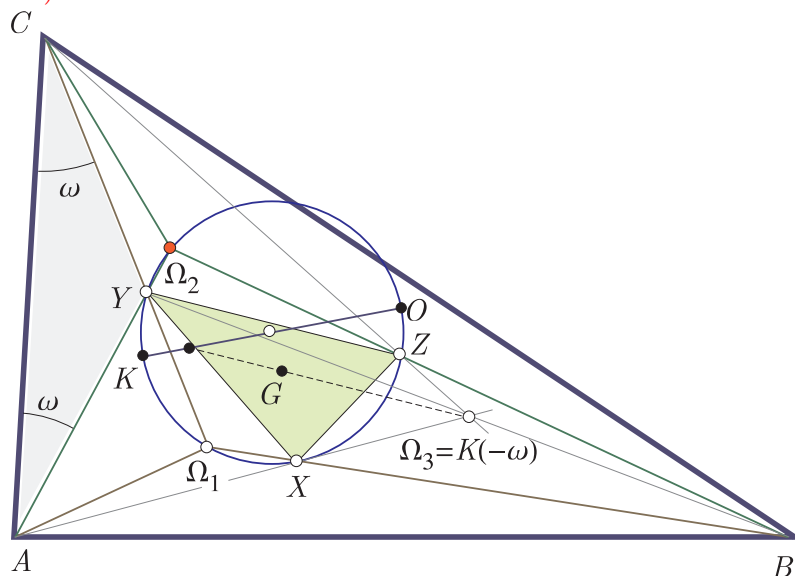
$\theta = -\omega$

Donde  $\omega$  es el ángulo de Brocard (14.61); el centro de perspectividad de

Kiepert es, en este caso, el que se conoce como tercer punto de Brocard,  $X_{76}$  en ETC,

$$\Omega_3 = K(-\omega) = \left( \frac{1}{S_A - S_\omega} : \frac{1}{S_B - S_\omega} : \frac{1}{S_C - S_\omega} \right) = \left( \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} \right).$$

(Applet CabriJava)



Los vértices de  $\widehat{XYZ}$ , si  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son los puntos de Brocard, son  $X = B\Omega_1 \cap C\Omega_2 = (a^2 : c^2 : b^2)$ ,  $Y = C\Omega_1 \cap A\Omega_2 = (c^2 : b^2 : a^2)$  y  $Z = A\Omega_1 \cap B\Omega_2 = (b^2 : a^2 : c^2)$ .

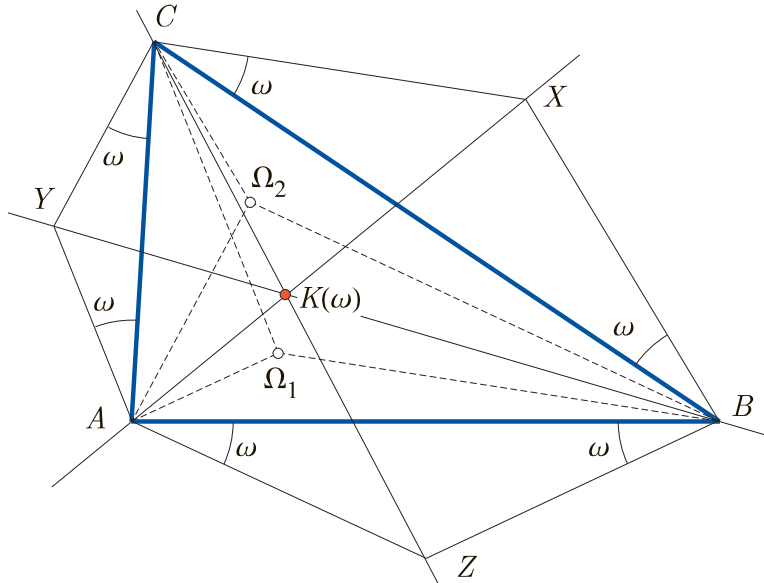
Este punto puede haber recibido su nombre debido a que sus coordenadas completan la permutación cíclica de las coordenadas  $\Omega_1(1/b^2 : 1/c^2 : 1/a^2)$  y  $\Omega_2(1/c^2 : 1/a^2 : 1/b^2)$  de los puntos de Brocard.

El triángulo  $\widehat{XYZ}$  se denomina **primer triángulo de Brocard** que es inversamente semejante a  $\widehat{ABC}$  con razón de semejanza  $2\cos\omega/\sqrt{1-4\sin^2\omega}$ , y la circunferencia circunscrita al triángulo  $\widehat{XYZ}$  recibe el nombre de **circunferencia de Brocard** (pág. 119) y ella tiene al segmento  $OK$  como diámetro y pasa por los puntos de Brocard  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ .

$$\theta = \omega$$

El centro de perspectividad es ( $X_{83}$  de ETC):

$$K(\omega) = \left( \frac{1}{S_A + S_\omega} : \frac{1}{S_B + S_\omega} : \frac{1}{S_C + S_\omega} \right) = \left( \frac{1}{b^2 + c^2} : \frac{1}{c^2 + a^2} : \frac{1}{a^2 + b^2} \right).$$



Al triángulo  $\widehat{XYZ}$  se le llama, en este caso, el triángulo exterior de Gallatly–Kiepert y es perspectivo con el triángulo ceviano del simediano. En efecto, sean  $K_a(0 : b^2 : c^2)$ ,  $K_b(a^2 : 0 : c^2)$  y  $K_c(a^2 : b^2 : 0)$  los pies de las cevianas de  $K(a^2 : b^2 : c^2)$ , entonces, las rectas  $XK_a$ ,  $YK_b$  y  $ZK_c$  tienen por ecuaciones:

$$(b^2 - c^2)x - c^2y + b^2z = 0, \quad c^2x + (c^2 - a^2)y - a^2z = 0, \quad -b^2x + a^2y + (a^2 - b^2)z = 0.$$

Estas rectas se cortan en el punto ( $X_{194}$  de ETC) de coordenadas

$$(a^2b^2 - b^2c^2 + c^2a^2 : b^2c^2 - c^2a^2 + a^2b^2 : c^2a^2 - a^2b^2 + b^2c^2).$$

El triángulo exterior de Gallatly–Kiepert también es perspectivo con el triángulo excentral. En efecto, se tienen las siguientes ecuaciones de las rectas:

$$XI_a : (b(S_B + S_\omega) - c(S_C + S_\omega))x - a(ac - S_B - S_\omega)y + a(ab - S_C - S_\omega)z = 0,$$

$$YI_b : b(bc - S_A - S_\omega)x + (c(S_C + S_\omega) - a(S_A + S_\omega))y - b(ba - S_C - S_\omega)z = 0,$$

$$ZI_c : -c(cb - S_A - S_\omega)x + c(ca - S_B - S_\omega)y + (a(S_A + S_\omega) - b(S_B + S_\omega))z = 0.$$

Las cuales se cortan en el punto:

$$(a(abc + a(S_A + S_\omega) - b(S_B + S_\omega) - c(S_C + S_\omega)) : \dots : \dots) = (a((a^2 + bc)(b + c) - a(b^2 + bc + c^2)) : \dots : \dots).$$

$\theta = \omega \pm \frac{\pi}{2}$

Como

$$S_{\omega \pm \pi/2} = S \cotag(\omega \pm \frac{\pi}{2}) = -S \tag \omega = -\frac{S^2}{S_\omega},$$

el centro de perspectiva de Kiepert es

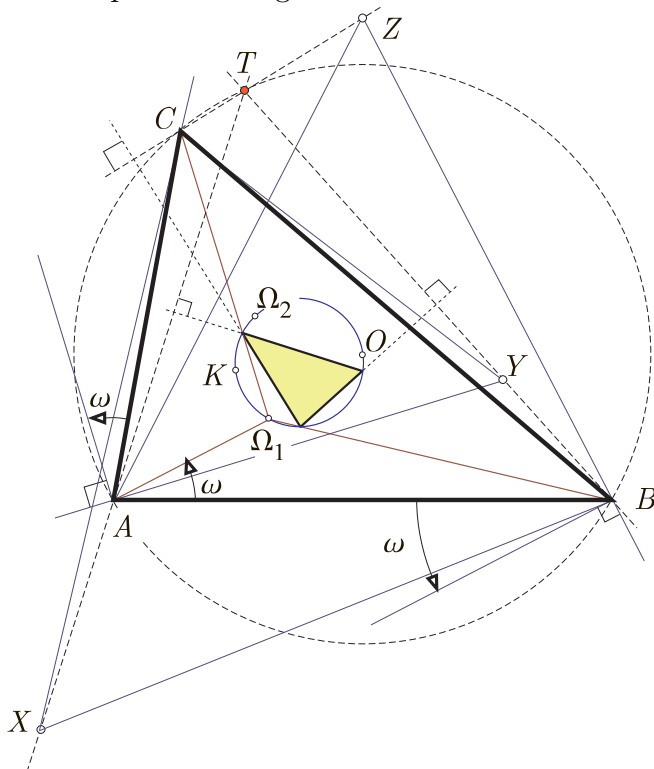
$$K(\omega \pm \frac{\pi}{2}) = \left( \frac{1}{S_A S_\omega - S^2} : \frac{1}{S_B S_\omega - S^2} : \frac{1}{S_C S_\omega - S^2} \right).$$

Este es el punto de Tarry,  $X_{98}$  de ETC, que también se puede expresar de las dos formas siguientes:

$$\left( \frac{1}{b^4 + c^4 - a^2(b^2 + c^2)} : \frac{1}{c^4 + a^4 - b^2(c^2 + a^2)} : \frac{1}{a^4 + b^4 - c^2(a^2 + b^2)} \right),$$

$$\left( \frac{1}{S_B S_C - S_A^2} : \frac{1}{S_C S_A - S_B^2} : \frac{1}{S_A S_B - S_C^2} \right).$$

El punto de Tarry es el de intersección de las perpendiculares por los vértices de  $\widehat{ABC}$  a los correspondientes lados del primer triángulo de Brocard:



Los vértices del primer triángulo de Brocard (pág. 66) son

$$(-a^2 : S_C - S_\omega : S_B - S_\omega), \quad (S_C - S_\omega : -b^2 : S_A - S_\omega), \quad (S_B - S_\omega : S_A - S_\omega : -c^2).$$

Las ecuaciones de las rectas por  $A, B$  y  $C$ , perpendiculares a los correspondientes lados de este triángulo son, respectivamente:

$$\begin{aligned}(a^4 + c^4 - b^2(a^2 + c^2))y - (b^4 + a^4 - c^2(b^2 + a^2))z &= 0 \\ -(c^4 + b^4 - a^2(c^2 + b^2))x + (b^4 + a^4 - c^2(b^2 + a^2))z &= 0 \\ (c^4 + b^2 - a^2(c^2 + b^2))x + (a^4 + c^4 - b^2(a^2 + c^2))y &= 0.\end{aligned}$$

La solución de este sistema de ecuaciones da las coordenadas del punto de Tarry.

$$\theta = -\omega \pm \frac{\pi}{2}$$

Como  $S_{-\omega \pm \pi/2} = -S_{\omega \mp \pi/2} = \frac{S^2}{S_\omega}$ , el centro de perspectividad de Kiepert ( $X_{262}$  de ETC) es el conjugado isogonal del punto medio del diámetro de Brocard,  $OK$  (pág. 119):

$$K(-\omega \pm \frac{\pi}{2}) = \left( \frac{1}{S_A S_\omega + S^2} : \frac{1}{S_B S_\omega + S^2} : \frac{1}{S_C S_\omega + S^2} \right).$$

$$K(-\omega \pm \frac{\pi}{2}) = \left( \frac{\text{sen } A}{\cos(A - \omega)} : \frac{\text{sen } B}{\cos(B - \omega)} : \frac{\text{sen } C}{\cos(C - \omega)} \right).$$

$$K(-\omega \pm \frac{\pi}{2}) = \left( \frac{1}{a^2 S_A + b^2 c^2} : \frac{1}{b^2 S_B + c^2 a^2} : \frac{1}{c^2 S_C + a^2 b^2} \right).$$

— . —

Los últimos casos tratados están relacionados entre sí y pueden obtenerse unos de otros mediante la construcción que vamos a exponer a continuación.

Si  $\widehat{XYZ}$  es un triángulo de Kiepert perspectivo con  $\widehat{ABC}$ , de centro de perspectividad  $K(\theta)$ , sea la circunferencia  $X(XB)$  con centro en  $X$  y pasando por los vértices  $B$  y  $C$ ; similarmente se consideran las circunferencias  $Y(YC)$  y  $Z(ZA)$ . Entonces, el centro radical de estas circunferencias es el perspector de Kiepert  $K(\pi/2 - \theta)$ .

Como la circunferencia  $X(XB)$  pasa por  $B(0 : 1 : 0)$  y  $C(0 : 0 : 1)$ , de su ecuación general (19.71) queda de la forma

$$a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy - px(x + y + z) = 0.$$

Como, además, ha de pasar por el simétrico de  $B$ , respecto a  $X(-a^2 : S_C + S_\theta : S_B - S_\theta)$ , que es  $(-a^2 : S_C : S_B + S_\theta)$ , se ha de cumplir:

$$-c^2 S_C + p S_\theta - b^2(S_B + S_\theta) + S_C(S_B + S_\theta) = 0.$$

Con lo que  $p = (S^2 + S_A S_\theta)/S_\theta = S^2/S_\theta + S_A = S_{\pi/2 - \theta} + S_A$  y las ecuaciones de las tres circunferencias, haciendo cálculo análogos para las otras dos, son:

$$a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy - (S_A + S_{\pi/2 - \theta})x(x + y + z) = 0,$$

$$a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy - (S_B + S_{\pi/2 - \theta})y(x + y + z) = 0,$$

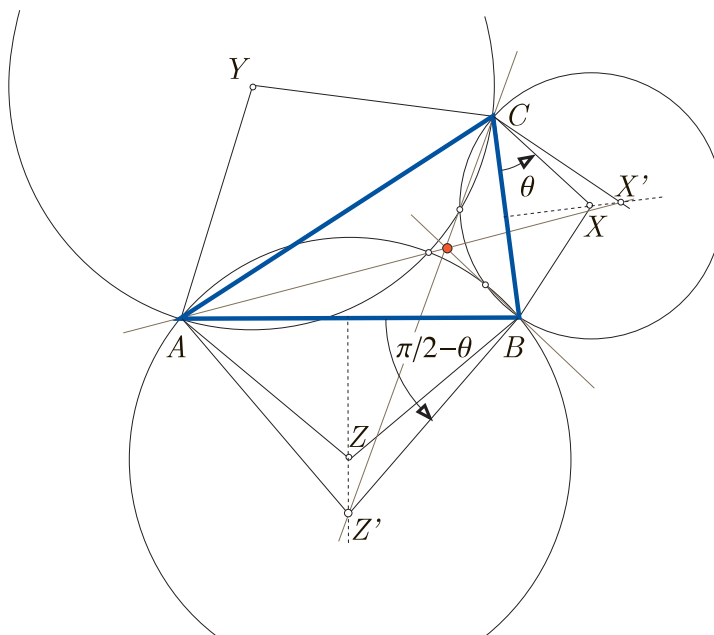
$$a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy - (S_C + S_{\pi/2 - \theta})z(x + y + z) = 0.$$

El centro radical de estas circunferencias se determina, por ejemplo, restando la primera ecuación de la segunda y la segunda de la tercera, con lo que queda el sistema de ecuaciones:

$$(S_A + S_{\pi/2-\theta})x - (S_B + S_{\pi/2-\theta})y = 0, \quad (S_B + S_{\pi/2-\theta})y - (S_C + S_{\pi/2-\theta})z = 0,$$

cuya solución es:

$$K(\pi/2 - \theta) = \left( \frac{1}{S_A + S_{\pi/2-\theta}} : \frac{1}{S_B + S_{\pi/2-\theta}} : \frac{1}{S_C + S_{\pi/2-\theta}} \right).$$



$$S_\theta = -2S_\omega \pm \sqrt{4S_\omega^2 - 3S^2}$$

Caso en que el triángulo de Kiepert  $\widehat{XYZ}$  es degenerado (sus vértices están alineados).

Los vértices  $X, Y$  y  $Z$  estén alineados cuando el determinante formado por sus coordenadas es nulo:

$$\begin{vmatrix} -S_B - S_C & S_C + S_\theta & S_B + S_\theta \\ S_C + S_\theta & -S_C - S_A & S_A + S_\theta \\ S_B + S_\theta & S_A S_\theta & -S_A - S_B \end{vmatrix} = 0.$$

$$2S_\theta^3 + 4(S_A + S_B + S_C)S_\theta^2 + 6(S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A)S_\theta = 0$$

Esa ecuación, a parte de la solución  $S_\theta = 0$ , para la cual los puntos  $X, Y$  y  $Z$  están en la recta del infinito y el centro de perspectividad de Kiepert es el ortocentro, tiene otras dos soluciones:

$$S_\theta^2 + 4S_\omega S_\theta + 3S^2 = 0, \quad S_\theta = -2S_\omega \pm \sqrt{4S_\omega^2 - 3S^2}.$$

$$S_\theta = (-S_\omega \pm \sqrt{S_\omega^2 - 3S^2})/3$$

Caso en que las rectas  $AX, BY$  y  $CZ$  (siendo  $\widehat{XYZ}$  el triángulo de Kiepert) son paralelas.

Esto ocurre cuando el centro de perspectividad de Kiepert está en el infinito, es decir, cuando la suma de sus coordenadas es cero:

$$3S_\theta^2 + 2(S_A + S_B + S_C)S_\theta + S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A = 3S_\theta^2 + 2S_\omega S_\theta + S^2 = 0.$$

Que tiene como soluciones <sup>(1)</sup>:  $S_\theta = \frac{1}{3}(-S_\omega \pm \sqrt{S_\omega^2 - 3S^2})$ .

## 16 Teorema de Jacobi

**16.1** Tomemos tres ángulos  $\theta_a, \theta_b$  y  $\theta_c$  y construimos los triángulos  $\widehat{BCX}, \widehat{CAY}$  y  $\widehat{ABZ}$  de tal forma que los ángulos orientados que forma  $AC$  con  $AY$  y  $AZ$  con  $AB$  sea  $\theta_a$ ;  $BA$  con  $BZ$  y  $BX$  con  $BC$  sea  $\theta_b$ ; y, finalmente,  $CB$  con  $CX$  y  $CY$  con  $CA$  sea  $\theta_c$  (se tiene que  $AY$  y  $AZ$  son simétricas respecto a la bisectriz en  $A$ ;  $BZ$  y  $BX$  son simétricas respecto a la bisectriz en  $B$ ; y  $CX$  y  $CY$  son simétricas respecto a la bisectriz en  $C$ ).

De acuerdo con la fórmula de Conway (15.62), las coordenadas de  $X, Y$  y  $Z$  son:

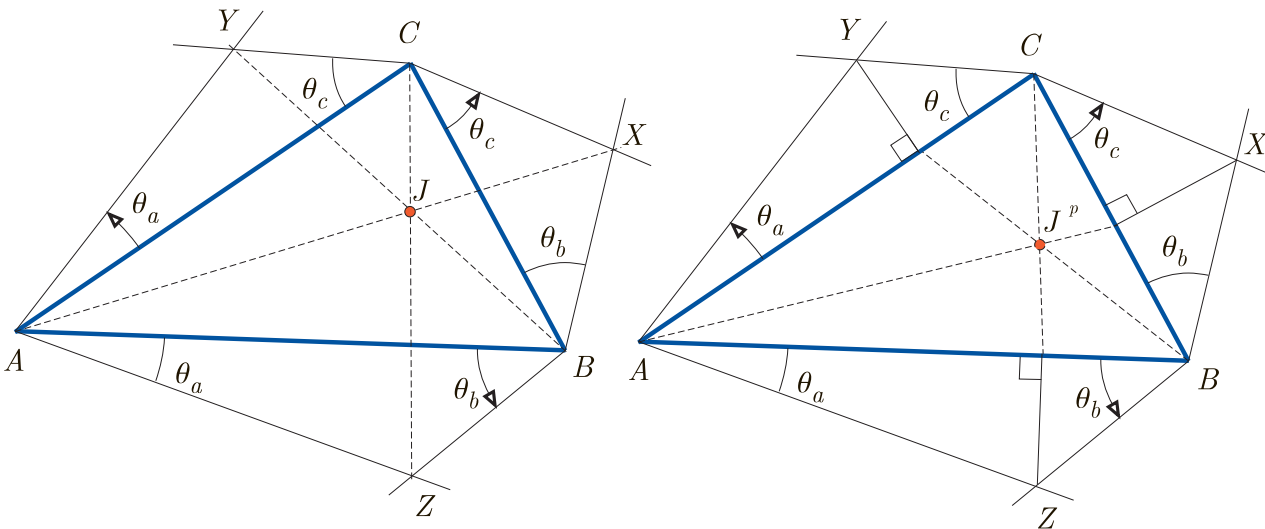
$$X(-a^2 : S_C + S_{\theta_c} : S_B + S_{\theta_b}), \quad Y(S_C + S_{\theta_c} : -b^2 : S_A + S_{\theta_a}), \quad Z(S_B + S_{\theta_b} : S_A + S_{\theta_a} : -c^2).$$

Las coordenadas de estos puntos se pueden poner en la forma siguiente:

$$X\left(** : \frac{1}{S_B + S_{\theta_b}} : \frac{1}{S_C + S_{\theta_c}}\right), \quad Y\left(\frac{1}{S_A + S_{\theta_a}} : ** : \frac{1}{S_C + S_{\theta_c}}\right), \quad Z\left(\frac{1}{S_A + S_{\theta_a}} : \frac{1}{S_B + S_{\theta_b}} : **\right).$$

Por lo que los triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{XYZ}$  son perspectivas ( Teorema de Jacobi<sup>(2)</sup>). El punto de intersección de las rectas  $AX, BY$  y  $CZ$  es

$$J\left(\frac{1}{S_A + S_{\theta_a}} : \frac{1}{S_B + S_{\theta_b}} : \frac{1}{S_C + S_{\theta_c}}\right) = \left(\frac{\text{sen } A \text{ sen } \theta_a}{\text{sen}(A + \theta_a)} : \frac{\text{sen } B \text{ sen } \theta_b}{\text{sen}(B + \theta_b)} : \frac{\text{sen } C \text{ sen } \theta_c}{\text{sen}(C + \theta_c)}\right). \quad (16.64)$$



<sup>(1)</sup> El radicando que aparece en estas soluciones es siempre positivo, pues por (2.9):

$$\begin{aligned} S_\omega^2 - 3S^2 &= (S_A + S_B + S_C)^2 - 3(S_A S_B + S_A S_C + S_B S_C) = a^4 + b^4 + c^4 - (a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) = \\ &= 4S^2(-2 + \text{cosec}^2 \omega) - S^2 \text{cosec}^2 \omega = \frac{S^2}{\text{sen}^2 \omega}(-8 \text{sen}^2 \omega + 3) > 0, \quad 0 < \omega < \pi/6. \end{aligned}$$

<sup>(2)</sup> En [9, §6.45, pág.176] al triángulo  $\widehat{XYZ}$  se le denomina "Kiepert-Morley-Hofstadter triangle".

En [20, §3.5.5, pág.40] este resultado aparece con el nombre de Teorema de Nagel. Un caso particular es el Teorema de Kariya (ver pág. 95)

Michael de Villiers.- Mathematics and Informatics Quarterly, 6(3), 169-171, Sept 1996, le denomina "Fermat-Torricelli Generalization".

Kostas Vittas, en <http://www.mathlinks.ro/> le denomina "Isogonic-Jacobi Theorem"

Para abreviar llamaremos a  $\widehat{XYZ}$  triángulo de Jacobi (relativo a los ángulos  $\theta_a, \theta_b$  y  $\theta_c$ ) y al centro de perspectividad de los triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{XYZ}$ , centro de perspectividad de Jacobi, que denotamos por  $J$ . Los triángulos de Kiepert (pág. 62) son un caso particular, cuando  $\theta_a = \theta_b = \theta_c$ .

Cuando  $\theta_a \equiv \theta(A, B, C)$  es una función de los ángulos y  $\theta_b = \theta(B, C, A), \theta_c = \theta_c(C, A, B)$ , al triángulo  $\widehat{XYZ}$  se le denomina en [9] triángulo de Kiepert-Morley-Hofstadter. El centro de perspectividad de Jacobi lo denotamos, en este caso, por  $J_\theta$ .

Si consideramos los pies de las perpendiculares  $A_X(0 : S_{\theta_c} : S_{\theta_b}), B_Y(S_{\theta_c} : 0 : S_{\theta_a})$  y  $C_Z(S_{\theta_b} : S_{\theta_a} : 0)$  trazadas desde los vértices  $X, Y$  y  $Z$  del triángulo de Jacobi a los lados  $BC, CA$  y  $AB$ , respectivamente, el triángulo  $A_X B_Y C_Z$  es perspectivo con  $\widehat{ABC}$ , con centro de perspectividad en el punto

$$J^p \left( \frac{1}{S_{\theta_a}} : \frac{1}{S_{\theta_b}} : \frac{1}{S_{\theta_c}} \right). \tag{16.65}$$

Este punto, cuando el centro de perspectividad de Jacobi es del tipo  $J_\theta$ , lo denotamos por  $J_\theta^p$ .

A partir de un triángulo de Jacobi  $\widehat{XYZ}$  (relativo a los ángulos  $\theta_a, \theta_b$  y  $\theta_c$ ), podemos construir otro triángulo de Jacobi  $\widehat{X'Y'Z'}$ , con vértices en puntos  $X' = BZ \cap CY, Y' = CX \cap AZ, Z' = AY \cap BX$ :

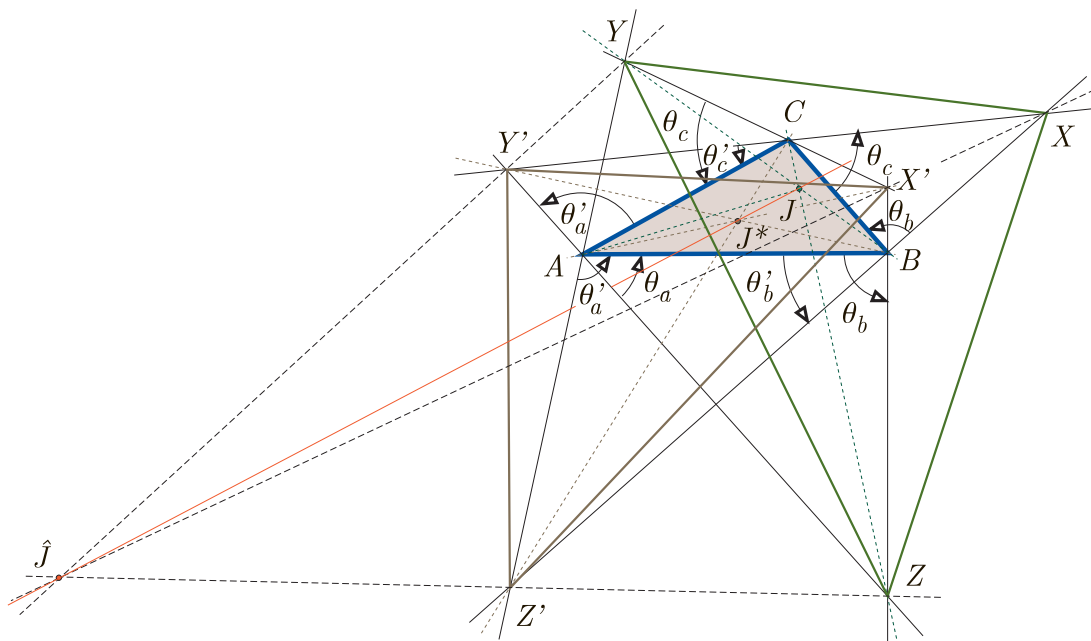
$$X' \left( (S_B + S_{\theta_b})(S_C + S_{\theta_c}) : -b^2(S_B + S_{\theta_b}) : -c^2(S_C + S_{\theta_c}) \right),$$

$$Y' \left( -a^2(S_A + S_{\theta_a}) : (S_A + S_{\theta_a})(S_C + S_{\theta_c}) : -c^2(S_C + S_{\theta_c}) \right),$$

$$Z' \left( -a^2(S_A + S_{\theta_a}) : -b^2(S_B + S_{\theta_b}) : (S_A + S_{\theta_a})(S_B + S_{\theta_b}) \right),$$

éste relativo a los ángulo  $\theta'_a = \pi - A - \theta_a, \theta'_b = \pi - B - \theta_b$  y  $\theta'_c = \pi - C - \theta_c$ ; aunque podemos tomar los ángulos  $-A - \theta_a, -B - \theta_b$  y  $-C - \theta_c$ , respectivamente, para determinar las rectas  $AY', BX'$  y  $CZ'$ . El centro de perspectividad de Jacobi (relativo a los ángulos  $\theta'_a, \theta'_b$  y  $\theta'_c$ ) es, ahora, el conjugado isogonal del centro de perspectividad de Jacobi  $J$ , relativo al triángulo  $\widehat{XYZ}$ :

$$J^* \left( a^2(S_A + S_{\theta_a}) : b^2(S_B + S_{\theta_b}) : c^2(S_C + S_{\theta_c}) \right).$$





Se tiene, además, que los triángulos  $\widehat{XYZ}$  y  $\widehat{X'Y'Z'}$  son perspectivas (diremos que son triángulos de Jacobi iso-relacionados), con centro de perspectividad en el punto (en la recta  $JJ^*$ ):

$$\hat{J} \left( a^2(S_A + S_{\theta_a}) - (S_B + S_{\theta_b})(S_C + S_{\theta_c}) : b^2(S_B + S_{\theta_b}) - (S_C + S_{\theta_c})(S_A + S_{\theta_a}) : c^2(S_C + S_{\theta_c}) - (S_A + S_{\theta_a})(S_B + S_{\theta_b}) \right). \quad (16.66)$$

Si el centro de perspectividad de Jacobi es de tipo  $J_\theta$ , este punto lo denotamos por  $\hat{J}_\theta$ .

## 16.2 Un ejemplo del caso general:

Sean un triángulo  $\widehat{ABC}$  y una recta cualquiera por el vértice  $A$  y sea  $\theta_a$  el ángulo orientado que forma el lado  $AC$  con ella; consideremos la simétrica de la recta tomada, respecto a la bisectriz interior en  $A$ . Las perpendiculares por  $B$  y  $C$  a  $BC$  cortan, respectivamente, a una de las rectas en  $Z$  e  $Y$  y a la otra en  $Z_1$  e  $Y_1$ . Ocurre entonces que los puntos  $BY \cap CZ_1$  y  $BY_1 \cap CZ$  están en la recta  $AO$ , siendo  $O$  el circuncentro de  $\widehat{ABC}$ .

Sea  $X$  el punto diametralmente opuesto a  $A$ , sobre la circunferencia circunscrita a  $\widehat{ABC}$ .

Por construcción, se tiene que  $\widehat{CAY} = \widehat{Z_1AB} = \theta_a$ . Como el ángulo  $\widehat{XBA} = 90^\circ$ , por ser  $AX$  un diámetro, y también  $\widehat{CBZ_1} = 90^\circ$ , por construcción, se deduce que  $\widehat{XBC} = \widehat{Z_1BA} = \theta_b$ . El mismo razonamiento, nos lleva a que  $\widehat{BCX} = \widehat{YCA} = \theta_c$ . Luego, se verifican las hipótesis del Teorema de Jacobi, y las rectas  $AX, BY, CZ_1$  concurren.

El mismo razonamiento sirve para establecer que  $AX, BY_1, CZ$  son concurrentes, como se quería demostrar.

Usando coordenadas, las perpendiculares a  $BC$  por  $C$  y  $B$  son, respectivamente

$$S_C x + a^2 y = 0, \quad S_B x + a^2 z = 0,$$

y las recta por  $A$  tal que el lado  $AC$  forma con ella un ángulo orientado  $\theta_a$  y su simétrica, respecto a la bisectriz por  $A$ , son, respectivamente

$$(S_{\theta_a} + S_A)y + b^2 z = 0, \quad (S_A - S_{A+\theta_a})y + b^2 z = 0.$$

Tomando las intersecciones adecuadas de estas rectas, se tiene que:

$$Y (a^2 b^2 : -b^2 S_C : (S_{\theta_a} + S_A) S_C), \quad Z (-a^2 (S_{\theta_a} + S_A) : -b^2 S_B : (S_{\theta_a} + S_A) S_B),$$

$$Y_1 (a^2 b^2 : -b^2 S_C : S_C (S_A - S_{A+\theta_a})), \quad Z_1 (a^2 (-S_A + S_{A+\theta_a}) : -b^2 S_B : S_B (S_A - S_{A+\theta_a})).$$

Para que las rectas  $BY, CZ_1$  y  $AO$  ( $-c^2 S_C y + b^2 S_B z = 0$ ) sean concurrentes, el determinante formado por sus coeficientes ha de ser nulo. Éste vale, usando (2.4),

$$a^2 b^2 S_B S_C (b^2 c^2 - S_{\theta_a} S_A - S_A^2 + S_{\theta_a} S_{A+\theta_a} + S_A S_{A+\theta_a}) = \frac{a^2 b^2 S_B S_C (b^2 c^2 - S^2 - S_A^2)}{S} = 0.$$

De forma análoga, se obtiene la concurrencia de las rectas  $CZ, BY_1$  y  $AO$ .  $\square$

Como  $\theta_b = \pi/2 - B$  y  $\theta_c = \pi/2 - C$ , los centros de perspectividad de Jacobi, para los dos casos, son:

$$\left( \frac{1}{S_A + S_{\theta_a}} : \frac{1}{S_B + S_{\frac{\pi}{2}-B}} : \frac{1}{S_C + S_{\frac{\pi}{2}-C}} \right), \quad \left( \frac{1}{S_A + S_{\pi-\theta_a-A}} : \frac{1}{S_B + S_{\frac{\pi}{2}-B}} : \frac{1}{S_C + S_{\frac{\pi}{2}-C}} \right),$$

que como  $\cotag(\frac{\pi}{2} - B) = \tag B$ ,  $\cotag(\pi - \theta_a - A) = -\cotag(\theta_a + A)$ , y, en consecuencia,  $S_{\frac{\pi}{2}-B} = S \tag B = S^2/S_B$  y  $S_{\pi-\theta_a-A} = -S_{\theta_a+A}$  y se pueden poner en la forma:

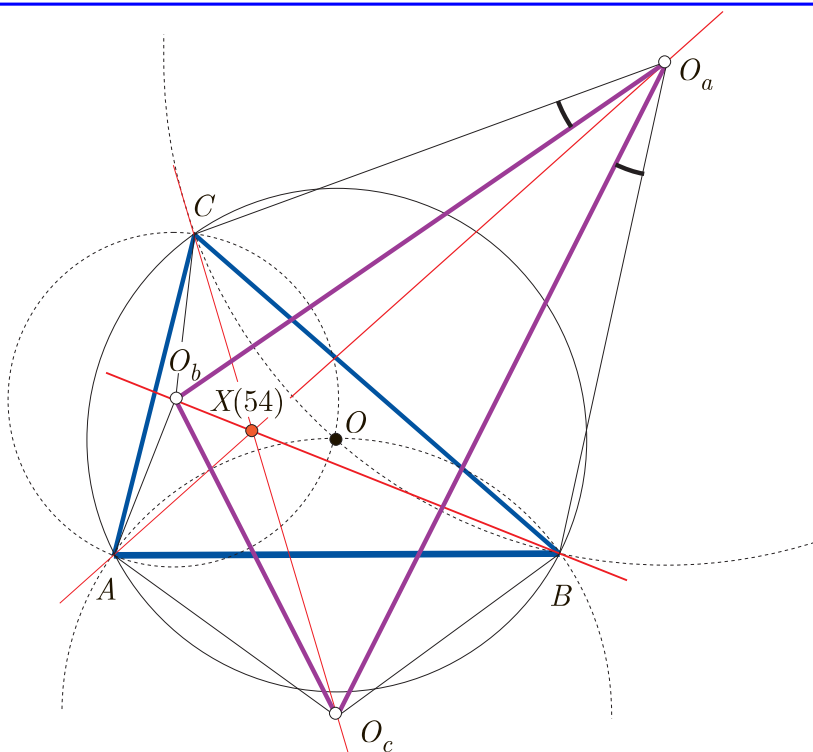
$$\left( \frac{1}{S_A + S_{\theta_a}} : \frac{S_B}{S_B + S^2} : \frac{S_C}{S_C + S^2} \right), \quad \left( \frac{1}{S_A - S_{\theta_a+A}} : \frac{S_B}{S_B + S^2} : \frac{S_C}{S_C + S^2} \right).$$

Como caso particular, tomemos la recta bisectriz exterior por  $A$ . Ahora,  $Y = Y_1$ ,  $Z = Z_1$ ,  $\theta_a = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$  y  $\cotag \theta_a = \tag(A/2)$ , con lo que el correspondiente centro de perspectividad, usando (2.4),  $S_B + S^2 = a^2c^2$ ,  $S_C + S^2 = a^2b^2$  y  $S_{A/2} = S_A + bc$ , es:

$$(a^2bc : b^2S_B : c^2S_C).$$

**16.3** Como aplicación del Teorema de Jacobi, podemos establecer el siguiente:

**Teorema de Kosnita.**- Las rectas que unen, respectivamente, los vértices  $A, B$  y  $C$  de un triángulo dado  $\widehat{ABC}$  con los circuncentros de los triángulos  $\widehat{BCO}$ ,  $\widehat{CAO}$  y  $\widehat{ABO}$  ( $O$  el circuncentro de  $\widehat{ABC}$ ) son concurrentes.



Sean  $O_a, O_b$  y  $O_c$  los circuncentros de los triángulos  $\widehat{BCO}$ ,  $\widehat{CAO}$  y  $\widehat{ABO}$ , respectivamente. Vamos a establecer que  $\widehat{ABC}$  es un triángulo de Jacobi de  $\widehat{O_aO_bO_c}$ , con lo que el teorema quedaría establecido.

Necesitamos demostrar que  $\widehat{O_cO_aB} = \widehat{CO_aO_b}$ . Pero esto es cierto, ya que  $O_a$  está en las mediatrices de  $BC$ ,  $BO$  y  $CO$  y se tiene que  $2\widehat{O_cO_aB} = \widehat{OO_aB} = \widehat{CO_aO} = 2\widehat{CO_aB}$ .

Análogamente se obtiene que  $\widehat{O_aO_bC} = \widehat{AO_bO_c}$  y  $\widehat{O_bO_cA} = \widehat{BO_cO_a}$ . □

Para obtener las coordenadas del centro de perspectividad de  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{O_aO_bO_c}$ , vamos a determinar las de los vértices de éste último:

La ecuación (19.71) de la circunferencia que pasa por los puntos  $B, C, O$  es

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - \frac{b^2c^2}{2S_A}x(x + y + z) = 0.$$

Su centro (19.76) tiene por coordenadas

$$O_a \left( *** : \frac{b^2 c^2 S_C}{2S_A} + b^2 S_B : \frac{b^2 c^2 S_B}{2S_A} + c^2 S_C \right) = (*** : b^2(c^2 S_C + 2S_A S_B) : c^2(b^2 S_B + 2S_A S_C)),$$

$$O_a \left( *** : \frac{b^2}{b^2 S_B + 2S_C S_A} : \frac{c^2}{c^2 S_C + 2S_A S_B} \right).$$

De la misma forma se obtienen las coordenadas de  $O_b$  y  $O_c$ ; por lo que, las rectas  $AO_a$ ,  $BO_b$  y  $CO_c$  se cortan en el punto de Kosnita ( $X_{54}$  en ETC):

$$\left( \frac{a^2}{a^2 S_A + 2S_B S_C} : \frac{b^2}{b^2 S_B + 2S_C S_A} : \frac{c^2}{c^2 S_C + 2S_A S_B} \right).$$

#### 16.4 Consideremos diversos casos particulares para los valores de los ángulos

$\theta_a = \theta(A, B, C)$ ,  $\theta_b = \theta(B, C, A)$ ,  $\theta_c = \theta(C, A, B)$ .

Comencemos con los conjugados isogonales de algunos centros de perspectividad de Kiepert, obtenidos en § 15.3.

##### 16.4.1

$$\theta_a = \frac{\pi}{2} - A$$

Este es el conjugado isogonal del ortocentro,  $K(\pm\pi/2)$ ; es decir, el circuncentro, pues al ser  $S_{\theta_a} = S^2/S_A$ :

$$J_{\frac{\pi}{2}-A} \left( \frac{S_A}{S^2 + S_A^2} : \frac{S_B}{S^2 + S_B^2} : \frac{S_C}{S^2 + S_C^2} \right) = (a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C).$$

El centro de perspectividad de los triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $A_X \widehat{B_Y} C_Z$  es  $J_{\frac{\pi}{2}-A}^p(S_A : S_B : S_C)$ , el conjugado isotómico del ortocentro.

El centro de perspectividad de  $\widehat{XYZ}$  y  $\widehat{X'Y'Z'}$  es

$$\hat{J}_{\frac{\pi}{2}} = \hat{J}_{\frac{\pi}{2}-A} (a^2 S_A - S_B S_C : b^2 S_B - S_A S_C : c^2 S_C - S_A S_B),$$

el punto de De Longschamps.

##### 16.4.2

$$\theta_a = \frac{2\pi}{3} - A$$

Es el conjugado isogonal del primer punto de Fermat,  $K(\pi/3)$ .

De  $\cotag \left( \frac{2\pi}{3} - A \right) = \frac{\sqrt{3} - \cotag A}{\sqrt{3} \cotag A + 1}$  se deduce que  $S_{\theta_a} = S \frac{\sqrt{3}S - S_A}{\sqrt{3}S_A + S}$ ; por lo que

$$J_{\frac{2\pi}{3}-A} \left( a^2(S + \sqrt{3}S_A) : b^2(S + \sqrt{3}S_B) : c^2(S + \sqrt{3}S_C) \right),$$

que es primer punto isodinámico ( $X_{15}$  en ETC). Para otra interpretación de los puntos isodinámicos, ver § 20.11.

$$J_{\frac{2\pi}{3}-A}^p \left( \frac{S + \sqrt{3}S_A}{\sqrt{3}S - S_A} : \frac{S + \sqrt{3}S_B}{\sqrt{3}S - S_B} : \frac{S + \sqrt{3}S_C}{\sqrt{3}S - S_C} \right),$$

es el producto baricéntrico del segundo punto de Napoleón,  $X_{18}$ , por el conjugado isotómico del primer punto de Fermat,  $X_{13}$ .

$$\begin{aligned} & \hat{J}_{\frac{2\pi}{3}} \left( -S^2 + a^2(\sqrt{3}S + 3S_A) - 3S_B S_C - \sqrt{3}S(S_B + S_C) : \right. \\ & \left. -S^2 + b^2(\sqrt{3}S + 3S_B) - 3S_A S_C - \sqrt{3}S(S_A + S_C) : -S^2 + c^2(\sqrt{3}S + 3S_C) - 3S_A S_B - \sqrt{3}S(S_A + S_B) \right) = \\ & \quad (a^2 S_A - 2S_B S_C : b^2 S_B - 2S_A S_C : c^2 S_C - 2S_A S_B) = \\ & \quad (\cos A - 2 \cos B \cos C : \cos B - 2 \cos C \cos A : \cos C - 2 \cos A \cos B). \end{aligned}$$

La expresión en función de los ángulos surge de la anterior con sólo utilizar  $S = bc \sin A = ca \sin B = ab \sin C$ ; se trata del punto del infinito de la recta de Euler ( $X_{30}$  en ETC).

### 16.4.3

$$\theta_a = \frac{\pi}{3} - A$$

Es el conjugado isogonal del segundo punto de Fermat,  $K(-\pi/3)$ . De  $\cotag(\frac{\pi}{3} - A) = \frac{\cotag A + \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cotag A - 1}$  se deduce que  $S_{\theta_a} = S \frac{S_A + \sqrt{3}S}{\sqrt{3}S_A - S}$ ; por lo que

$$J_{\frac{\pi}{3}-A} \left( a^2(\sqrt{3}S_A - S) : b^2(\sqrt{3}S_B - S) : c^2(\sqrt{3}S_C - S) \right),$$

que es segundo punto isodinámico ( $X_{16}$  en ETC).

$$J_{\frac{\pi}{3}-A}^p \left( \frac{\sqrt{3}S_A - S}{\sqrt{3}S + S_A} : \frac{\sqrt{3}S_B - S}{\sqrt{3}S + S_B} : \frac{\sqrt{3}S_C - S}{\sqrt{3}S + S_C} \right),$$

es el producto baricéntrico del primer punto de Napoleón,  $X_{17}$ , por el conjugado isotómico del segundo punto de Fermat,  $X_{14}$ .

$$\hat{J}_{\frac{\pi}{3}} (S_A S_B + S_A S_C - 2S_B S_C : S_A S_B - 2S_A S_C + S_B S_C : -2S_A S_B + S_A S_C + S_B S_C).$$

Se trata del punto del infinito de la recta de Euler.

## 16.4.4

$$\theta_a = \pm \frac{\pi}{6} - A$$

Son los conjugados de los puntos de Napoleón,  $K(\pm\pi/6)$  y figuran en ETC como los  $X_{61}$  y  $X_{62}$ :

$$J_{\pm\frac{\pi}{6}-A} \left( a^2(S_A \pm \sqrt{3}S) : b^2(S_B \pm \sqrt{3}S) : c^2(S_C \pm \sqrt{3}S) \right).$$

$$J_{\pm\frac{\pi}{6}-A}^p \left( \frac{\pm\sqrt{3}S + S_A}{\mp\sqrt{3}S_A + S} : \frac{\pm\sqrt{3}S + S_B}{\mp\sqrt{3}S_B + S} : \frac{\pm\sqrt{3}S + S_C}{\mp\sqrt{3}S_C + S} \right),$$

que son los productos baricéntricos de los puntos de Fermat por el conjugados isotómicos de los puntos de Napoleón.

$$\hat{J}_{\frac{\pi}{6}}(S_A S_B + S_A S_C + 2S_B S_C : S_A S_B + 2S_A S_C + S_B S_C : 2S_A S_B + S_A S_C + S_B S_C).$$

Se trata del centro de la circunferencia de los nueve puntos,  $X_5$  en ETC.

## 16.4.5

$$\theta_a = \pm \frac{\pi}{4} - A$$

Son los conjugados de los puntos de Vecten,  $K(\pm\pi/4)$ . De  $\cotag(\pm\frac{\pi}{4} - A) = \frac{\pm \cotag A + 1}{\cotag A \mp 1}$  se deduce que  $S_{\theta_a} = \frac{(\pm S_A + S)S}{S_A \mp S}$ ; por lo que

$$J_{\pm\frac{\pi}{4}-A} \left( a^2(S_A \pm S) : b^2(S_B \pm S) : c^2(S_C \pm S) \right).$$

Estos puntos son, con el signo +, el punto de Kenmotu ( $X_{371}$  en ETC), y, con el signo menos, el centro de semejanza externo de la circunferencia circunscrita y la segunda circunferencia de Lemoine o circunferencia coseno (§ 20.13),  $X_{372}$  en ETC.

$$J_{\pm\frac{\pi}{4}-A}^p \left( \frac{\pm S + S_A}{\mp S_A + S} : \frac{\pm S + S_B}{\mp S_B + S} : \frac{\pm S + S_C}{\mp S_C + S} \right),$$

que son los productos baricéntricos de un punto de Vecten por el conjugado isotómico del otro punto de Vecten.

$$\hat{J}_{\frac{\pi}{4}} \left( \pm a^2 S - S^2 + a^2 S_A \mp S S_B \mp S S_C - S_B S_C : \pm b^2 S - S^2 + b^2 S_B \mp S S_C \mp S S_A - S_C S_A : \right. \\ \left. \pm c^2 S - S^2 + c^2 S_C \mp S S_A \mp S S_B - S_A S_B \right) = (S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B).$$

Es el ortocentro,  $X_4$  en ETC.

## 16.4.6

$$\theta_a = \pm \operatorname{arctag} 2 - A$$

Son los conjugados isogonales de los centros de perspectividad de Kiepert  $K(\pm \operatorname{arctag} 2)$ . Como

$$\cotag(\mp \operatorname{arctag} 2 - A) = \frac{\mp \cotag A + 2}{2 \cotag A \pm 1}, \quad \text{se deduce que } S_{\theta_a} = \frac{(\mp S_A + 2S)S}{2S_A \pm S};$$

por lo que

$$J_{\mp \operatorname{arctag} 2 - A} (a^2(2S_A \pm S) : b^2(2S_B \pm S) : c^2(2S_C \pm S)).$$

Estos puntos son los  $X_{1151}$  y  $X_{1152}$  en ETC, que son inversos uno de otro en la circunferencia de Brocard.

$$J_{\mp \operatorname{arctag} 2 - A}^p \left( \frac{\pm S + 2S_A}{\mp S_A + 2S} : \frac{\pm S + 2S_B}{\mp S_B + 2S} : \frac{\pm S + 2S_C}{\mp S_C + 2S} \right).$$

$$\hat{J}_{\operatorname{arctag} 2} \left( -11a^4 + 6(b^2 + c^2)a^2 + 5(b^2 - c^2)^2 : \dots : \dots \right).$$

## 16.4.7

$$\theta_a = \pm \operatorname{arctag} 3 - A$$

Son los conjugados isogonales de los centros de perspectividad de Kiepert  $K(\pm \operatorname{arctag} 3)$ . De

$$\cotag(\mp \operatorname{arctag} 3 - A) = \frac{\mp \cotag A + 3}{3 \cotag A \pm 1}, \quad \text{se deduce que } S_{\theta_a} = \frac{(\mp S_A + 3S)S}{3S_A \pm S};$$

por lo que

$$J_{\mp \operatorname{arctag} 3 - A} (a^2(3S_A \pm S) : b^2(3S_B \pm S) : c^2(3S_C \pm S)).$$

Estos puntos son los conjugados isogonales de  $X_{1327}$  y  $X_{1328}$  en ETC.

$$J_{\mp \operatorname{arctag} 3 - A}^p \left( \frac{\pm S + 3S_A}{\mp S_A + 3S} : \frac{\pm S + 3S_B}{\mp S_B + 3S} : \frac{\pm S + 3S_C}{\mp S_C + 3S} \right).$$

$$\hat{J}_{\operatorname{arctag} 3} (5S_B S_C - 4a^2 S_A : 5S_C S_A - 4b^2 S_B : 5S_A S_B - 4c^2 S_C).$$

## 16.4.8

$$\theta_a = -\omega - A$$

Es el conjugado isogonal del centro de perspectividad de Kiepert  $K(\omega)$ ,

$$\cotag(-\omega - A) = \frac{-\cotag A \cotag \omega + 1}{\cotag \omega + \cotag A}, \quad \text{se deduce que } S_{\theta_a} = \frac{(-S_A S_\omega + S^2)S}{S_\omega + S_A};$$

por lo que

$$J_{-\omega - A} (a^2(S_A + S_\omega) : b^2(S_B + S_\omega) : c^2(S_C + S_\omega)) = (a^2(b^2 + c^2) : b^2(c^2 + a^2) : c^2(a^2 + b^2)).$$

Este es el punto medio de los puntos de Brocard,  $X_{39}$ .

$$J_{-\omega-A}^p \left( \frac{S_A + S \cotag \omega}{S(S - S_A \cotag \omega)} : \frac{S_B + S \cotag \omega}{S(S - S_B \cotag \omega)} : \frac{S_C + S \cotag \omega}{S(S - S_C \cotag \omega)} \right) =$$

$$\left( \frac{(b^2 + c^2)}{b^4 + c^4 - a^2(b^2 + c^2)} : \frac{(c^2 + a^2)}{c^4 + a^4 - b^2(c^2 + a^2)} : \frac{(a^2 + b^2)}{a^4 + b^4 - c^2(a^2 + b^2)} \right).$$

Es el producto baricéntrico del complemento del simediano ( $X_{141}$ ) y el punto de Tarry ( $X_{98}$ ).

$$\hat{J}_\omega (a^4 + b^2 c^2 : b^4 + a^2 c^2 : c^4 + a^2 b^2),$$

figura en ETC con el número  $X_{384}$ .

#### 16.4.9

$$\theta_a = \omega - A$$

Es el conjugado isogonal del centro de perspectividad de Kiepert  $K(-\omega)$ ,

$$\cotag(\omega - A) = \frac{\cotag A \cotag \omega + 1}{-\cotag \omega + \cotag A}, \quad \text{se deduce que } S_{\theta_a} = \frac{(S_A S_\omega + S^2)S}{-S_\omega + S_A};$$

por lo que

$$J_{\omega-A} (a^4 : b^4 : c^4).$$

Este es el punto  $X_{32}$  en ETC.

$$J_{\omega-A}^p \left( \frac{a^2}{a^4 - a^2(b^2 + c^2) - 2b^2 c^2} : \frac{b^2}{b^4 - b^2(c^2 + a^2) - 2c^2 a^2} : \frac{c^2}{c^4 - c^2(a^2 + b^2) - 2a^2 b^2} \right).$$

Es el conjugado isogonal del  $X_{183}$ .

Ahora vamos a considerar otros centros de perspectividad de Jacobi, no necesariamente relacionados con centros de perspectividad de Kiepert.

#### 16.4.10

$$\theta_a = A$$

Los puntos  $X, Y$  y  $Z$  son, respectivamente, los simétricos de  $A, B$  y  $C$  respecto a los lados opuestos; por lo que  $AX, BY$  y  $CZ$  son las alturas y el centro de perspectividad de Jacobi es el ortocentro  $J_A = H(1/S_A : 1/S_B : 1/S_C) = J_A^p$ .  $J_A^* = O = J_{-2A}$ . El centro de perspectividad de los triángulos de Jacobi iso-relacionados es

$$\hat{J}_A (a^2 S_A - 2S_B S_C : b^2 S_B - 2S_A S_C : c^2 S_C - 2S_A S_B),$$

punto del infinito de la recta de Euler ( $X_{30}$  en ETC).

#### 16.4.11

$$\theta_a = -A$$

Los triángulos  $\widehat{XYZ}$  y  $\widehat{ABC}$  coinciden.

16.4.12

$$\theta_a = -2A$$

$J_{-2A}$  es el conjugado isogonal de  $J_A$  (§16.4.10), es decir, el circuncentro  $O$ .

Los pies de las perpendiculares por  $X, Y$  y  $Z$  a los lados  $BC, CA$  y  $AB$ , forman un triángulo perspectivo con  $\widehat{ABC}$ , con centro de perspectividad en el punto de Prasolov <sup>(1)</sup> ( $X_{68}$  en ETC):

$$J_{-2A}^p \left( \frac{S_A}{S^2 - S_A^2} : \frac{S_B}{S^2 - S_B^2} : \frac{S_C}{S^2 - S_C^2} \right) = \left( \frac{\cotag A}{S - S \cotag^2 A} : \frac{\cotag B}{S - S \cotag^2 B} : \frac{\cotag C}{S - S \cotag^2 C} \right) = (\tag 2A : \tag 2B : \tag 2C).$$

16.4.13

$$\theta_a = A/2$$

Los puntos  $X, Y$  y  $Z$  son las reflexiones del incentro  $I$  sobre los lados  $BC, CA$  y  $AB$ , respectivamente, y el centro de perspectividad de los triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{XYZ}$  es el punto de Gray ( $X_{79}$  de ETC), que como  $S_{A/2} = S + bc$  y  $S = bc \sen A$ , tiene las siguientes expresiones para sus coordenadas:

$$J_{A/2} \left( \frac{1}{S_A + S_{A/2}} : \frac{1}{S_B + S_{B/2}} : \frac{1}{S_C + S_{C/2}} \right) = \left( \frac{1}{2S_A + bc} : \frac{1}{2S_B + ca} : \frac{1}{2S_C + ab} \right) = \left( \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2 + bc} : \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2 + ca} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2 + ab} \right) = \left( \frac{\sen A}{1 + 2 \cos A} : \frac{\sen B}{1 + 2 \cos B} : \frac{\sen C}{1 + 2 \cos C} \right).$$

El que los triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{XYZ}$  sean perspectivos, también surge del Teorema de Kosnita (pág. 74), al ser  $A, B$  y  $C$  los centros de las circunferencias circunscritas a los triángulos  $\widehat{YZI}$ ,  $\widehat{ZXI}$  y  $\widehat{XYI}$  ( $I$  el incentro de  $\widehat{ABC}$  y circuncentro de  $\widehat{XYZ}$ ).

$$J_{A/2}^* = J_{-\frac{3A}{2}} (a^2(-a^2 + b^2 + c^2 + bc) : b^2(a^2 - b^2 + c^2 + ca) : c^2(a^2 + b^2 - c^2 + ab)) = (\sen A + \sen 2A : \sen B + \sen 2B : \sen C + \sen 2C).$$

<sup>(1)</sup> Punto de Prasolov.- Si  $\widehat{A'B'C'}$  está formado por los simétricos del triángulo órtico de  $\widehat{ABC}$ , respecto al centro  $N$  de la circunferencia de los nueve puntos (pág. 114), las rectas  $AA', BB'$  y  $CC'$  son concurrentes. En efecto, Sólo basta con tener presente que el simétrico de  $H_a(0 : S_C : S_B)$  respecto a  $N(S^2 + S_B S_C : S^2 + S_C S_A : S^2 + S_A S_B)$  es

$$A' (a^2(S^2 + S_B S_C) : S_B(S^2 - S_C^2) : S_C(S^2 - S_B^2)) = \left( *** : \frac{S_B}{S^2 - S_B^2} : \frac{S_C}{S^2 - S_C^2} \right).$$

Y similarmente con los otros simétricos  $B'$  y  $C'$ . La concurrencia es el punto de Prasolov.



Este es el  $X_{35}$  de ETC, descrito en ella como el centro de perspectividad de  $\widehat{ABC}$  y del triángulo cuyos vértices son los inversos de los exincentros respecto a la circunferencia circunscrita a  $\widehat{ABC}$  <sup>(1)</sup>.

El centro de perspectividad de los triángulos de Jacobi iso-relacionados, para este caso, es

$$\hat{J}_{A/2} (a^2 S_A - 2S_B S_C - a(bS_B + cS_C) : b^2 S_B - 2S_C S_A - b(cS_C + aS_A) : \dots).$$

Este es el punto  $X_{1770}$  de ETC.

Los pies de las perpendiculares por  $X, Y$  y  $Z$  a los lados  $BC, CA$  y  $AB$ , respectivamente, son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados, que son los pies de las cevianas del punto de Gergonne (pág. 34):

$$J_{A/2}^p \left( \frac{1}{S_{A/2}} : \frac{1}{S_{B/2}} : \frac{1}{S_{C/2}} \right) = \left( \frac{1}{2s(s-a)} : \frac{1}{2s(s-b)} : \frac{1}{2s(s-c)} \right) = \left( \frac{1}{s-a} : \frac{1}{s-b} : \frac{1}{s-c} \right).$$

#### 16.4.14

$$\theta_a = -A/2$$

Los puntos  $X, Y$  y  $Z$  coinciden, claro está, con el incentro y, por tanto,  $J_{-A/2} = I$ .  $J_{-A/2}^* = J_{-A/2} = I$ .  $J_{-A/2}^p$  es el punto de Gergonne.

#### 16.4.15

$$\theta_a = \frac{A-\pi}{2}$$

El triángulo de Jacobi es el que tiene por vértices los simétricos de los excentros respecto a los correspondientes lados.

Ya que  $\cotag \left( \frac{A-\pi}{2} \right) = -\tag \frac{A}{2}$ , la primera componente de  $J_{\frac{A-\pi}{2}}$  es

$$\frac{1}{S_A - \frac{S^2}{S_{A/2}}} = \frac{1}{S_A - \frac{-S_A^2 + b^2 c^2}{S_A + bc}} = \frac{1}{2S_A - bc}.$$

Así,

$$J_{\frac{A-\pi}{2}} \left( \frac{1}{2S_A - bc} : \frac{1}{2S_B - ca} : \frac{1}{2S_C - ab} \right).$$

Se trata (pág. 35) del punto simétrico del incentro respecto al punto de Feuberbach ( $X_{80}$  en ETC).

<sup>(1)</sup> La polar del exincentro  $I_a(-a : b : c)$  respecto a la circunferencia  $O(R)$  (19.69)  $a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy = 0$ , circunscrita a  $\widehat{ABC}$  es:

$$bc(b+c)x + ac(a-c)y + ab(a-b)z = 0,$$

que corta a la recta  $OI_a$ :

$$bc(b-c)(a+b+c)x + ac(a+c)(a+b-c)y - ab(a+b)(a-b+c)z = 0,$$

en el inverso de  $I_a$  respecto  $O(R)$ :

$$(-a^2 (a^2 - b^2 - c^2 + bc) : b^2 (a^2 - b^2 + c^2 + ca) : c^2 (a^2 + b^2 - c^2 + ab)).$$

Similarmente, se obtienen los inversos de  $I_b(a : -b : c)$  e  $I_c(a : b : -c)$  respecto a  $O(R)$ , obteniéndose los puntos de coordenadas:

$$(a^2(-a^2 + b^2 + c^2 + bc) : *** : c^2(a^2 + b^2 - c^2 + ab)), \quad (a^2(-a^2 + b^2 + c^2 + bc) : b^2(a^2 - b^2 + c^2 + ca) : ***).$$

16.4.16

$$\theta_a = -\frac{3A}{2}$$

El centro de perspectividad de Jacobi es el conjugado de  $J_{A/2}$  (§16.4.13), esto es

$$J_{-3A/2} (a^2(bc + 2S_A) : b^2(ca + 2S_B) : c^2(ab + 2S_C)),$$

que se puede obtener a partir de (16.64), teniendo en cuenta que

$$\cotag\left(-\frac{3A}{2}\right) = \frac{(1 - 2\cos A)\cotag(A/2)}{1 + 2\cos A} = \frac{(1 - 2S_A/(bc))(S_A + bc)}{S(1 + 2S_A/(bc))} = \frac{(bc - 2S_A)(S_A + bc)}{S(bc + S_A)},$$

es decir,

$$S_{-\frac{3A}{2}} = \frac{(bc - 2S_A)(S_A + bc)}{bc + 2S_A}.$$

Por otra parte, haciendo uso también de esta última expresión, se obtiene que:

$$J_{-3A/2}^p \left( \frac{bc + 2S_A}{b^2c^2 - bcS_A - 2S_A^2} : \frac{ca + 2S_B}{c^2a^2 - caS_B - 2S_B^2} : \frac{ab + 2S_C}{a^2b^2 - abS_C - 2S_C^2} \right),$$

Que no figura actualmente en ETC, pero es el producto baricéntrico del  $X_{35}$  por el conjugado isotómico del  $X_{2323}(a^2(a - b - c)(a^2 - b^2 - c^2 + bc) : \dots : \dots)$ .

En términos de los ángulos, usando  $S_A = bc \cos A = ca \cos B = ab \cos C$ , se tiene

$$J_{\pi-3A/2}^p \left( \frac{a(1 + 2\cos A)}{1 - \cos A - 2\cos^2 A} : \frac{b(1 + 2\cos B)}{1 - \cos B - 2\cos^2 B} : \frac{c(1 + 2\cos C)}{1 - \cos C - 2\cos^2 C} \right) = \left( \frac{\sin A + \sin 2A}{\cos A + \cos 2A} : \frac{\sin B + \sin 2B}{\cos B + \cos 2B} : \frac{\sin C + \sin 2C}{\cos C + \cos 2C} \right).$$

16.4.17

$$\theta_a = -A/4$$

Los puntos  $X, Y$  y  $Z$  son los incentros de los triángulos  $\widehat{IBC}, \widehat{AIC}$  y  $\widehat{ABI}$ , respectivamente.

Los cuadrados de las longitudes de los segmentos  $IA, IB$  e  $IC$  son, respectivamente:

$$\frac{(b + c)^2 S_A + b^2 S_B + c^2 S_C}{(a + b + c)^2} = \frac{bc(-a + b + c)}{a + b + c},$$

$$\frac{a^2 S_A + (c + a)^2 S_B + c^2 S_C}{(a + b + c)^2} = \frac{ca(a - b + c)}{a + b + c},$$

$$\frac{a^2 S_A + b^2 S_B + (a + b)^2 S_C}{(a + b + c)^2} = \frac{ab(a + b - c)}{a + b + c}.$$

Las coordenadas de los incentros <sup>(1)</sup> de los triángulos  $\widehat{IBC}, \widehat{AIC}$  y  $\widehat{ABI}$  son, respectivamente, en coordenadas baricéntricas absolutas:

<sup>(1)</sup> Las coordenadas de los incentros de los triángulos  $\widehat{IBC}, \widehat{AIC}$  y  $\widehat{ABI}$ , respecto de ellos mismos son, respecti-

$$\begin{aligned}
X &= \frac{a}{a+b+c}(a:b:c) + \sqrt{\frac{ab(a+b-c)}{a+b+c}}(0:1:0) + \sqrt{\frac{ac(a-b+c)}{a+b+c}}(0:0:1), \\
Y &= \sqrt{\frac{ab(a+b-c)}{a+b+c}}(1:0:0) + \frac{b}{a+b+c}(a:b:c) + \sqrt{\frac{bc(-a+b+c)}{a+b+c}}(0:0:1), \\
Z &= \sqrt{\frac{ac(a-b+c)}{a+b+c}}(1:0:0) + \sqrt{\frac{bc(-a+b+c)}{a+b+c}}(0:1:0) + \frac{c}{a+b+c}(a:b:c).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X &\left( \frac{a^2}{a+b+c} : \frac{ab}{a+b+c} + \sqrt{\frac{ab(a+b-c)}{a+b+c}} : \frac{ac}{a+b+c} + \sqrt{\frac{ac(a-b+c)}{a+b+c}} \right), \\
Y &\left( \frac{ab}{a+b+c} + \sqrt{\frac{ab(a+b-c)}{a+b+c}} : \frac{b^2}{a+b+c} : \frac{bc}{a+b+c} + \sqrt{\frac{bc(-a+b+c)}{a+b+c}} \right), \\
Z &\left( \frac{ac}{a+b+c} + \sqrt{\frac{ac(a-b+c)}{a+b+c}} : \frac{bc}{a+b+c} + \sqrt{\frac{bc(-a+b+c)}{a+b+c}} : \frac{c^2}{a+b+c} \right).
\end{aligned}$$

Estos puntos también se pueden expresar mediante las coordenadas (multiplicando por  $a+b+c$ ) siguientes:

$$\begin{aligned}
X &\left( a^2 : ab + \sqrt{ab(a+b-c)(a+b+c)} : ac + \sqrt{ac(a-b+c)(a+b+c)} \right), \\
Y &\left( ab + \sqrt{ab(a+b-c)(a+b+c)} : b^2 : bc + \sqrt{bc(-a+b+c)(a+b+c)} \right), \\
Z &\left( ac + \sqrt{ac(a-b+c)(a+b+c)} : bc + \sqrt{bc(-a+b+c)(a+b+c)} : c^2 \right).
\end{aligned}$$

O bien,

$$\begin{aligned}
X &\left( *** : \frac{1}{ca + \sqrt{ca(a-b+c)(a+b+c)}} : \frac{1}{ab + \sqrt{ab(a+b-c)(a+b+c)}} \right), \\
Y &\left( \frac{1}{bc + \sqrt{bc(-a+b+c)(a+b+c)}} : *** : \frac{1}{ab + \sqrt{ab(a+b-c)(a+b+c)}} \right), \\
Z &\left( \frac{1}{bc + \sqrt{bc(-a+b+c)(a+b+c)}} : \frac{1}{ca + \sqrt{ca(a-b+c)(a+b+c)}} : *** \right).
\end{aligned}$$

vamente:

$$\begin{aligned}
&\left( a(a+b+c) : \sqrt{ab(a+b-c)(a+b+c)} : \sqrt{ac(a-b+c)(a+b+c)} \right), \\
&\left( \sqrt{ab(a+b-c)(a+b+c)} : b(a+b+c) : \sqrt{bc(-a+b+c)(a+b+c)} \right), \\
&\left( \sqrt{ac(a-b+c)(a+b+c)} : \sqrt{bc(-a+b+c)(a+b+c)} : c(a+b+c) \right).
\end{aligned}$$

Los puntos que tienen estas coordenadas respecto a  $\widehat{ABC}$ , forman un triángulo perspectivo con aquél, con centro de perspectividad en el punto  $X_{174}$  de ETC ("Yff center of congruence")

$$\left( \frac{1}{\sqrt{bc(-a+b+c)(a+b+c)}} : \dots : \dots \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{2bc(S_A + bc)}} : \dots : \dots \right) = \left( \operatorname{sen} \frac{A}{2} : \operatorname{sen} \frac{B}{2} : \operatorname{sen} \frac{C}{2} \right),$$

O bien,

$$\left( \sqrt{\frac{a}{-a+b+c}} : \sqrt{\frac{b}{a-b+c}} : \sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \right).$$

Así, el centro de perspectividad de los triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{XYZ}$  es el primer punto de De Villiers ( $X_{1127}$  de ETC):

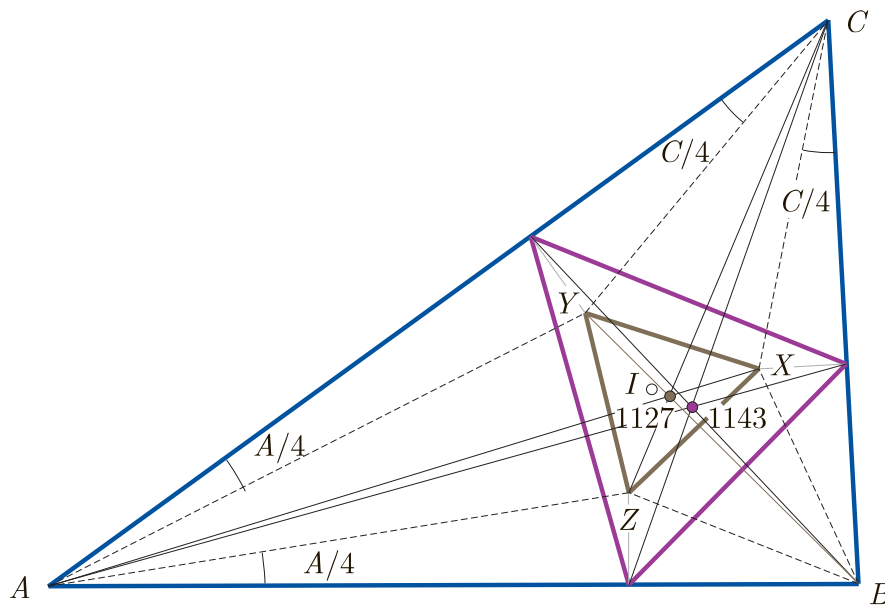
$$J_{-A/4} \left( \frac{1}{bc + \sqrt{bc(-a + b + c)(a + b + c)}} : \dots : \dots \right).$$

Estas coordenadas las podemos expresar en función de los ángulos del triángulo  $\widehat{ABC}$ , usando que  $(-a + b + c)(a + b + c) = -a^2 + b^2 + c^2 + 2bc = 2S_A + 2bc = 2S_{A/2}$ ,  $S = bc \operatorname{sen} A$  y  $\operatorname{sen} A = 2 \operatorname{sen}(A/2) \cos(A/2)$ . Así, la primera componente queda

$$\frac{1}{\frac{S}{\operatorname{sen} A} + \sqrt{\frac{2S^2}{\operatorname{sen} A} \cotag \frac{A}{2}}} = \frac{1}{\frac{S}{\operatorname{sen} A} + \frac{S}{\operatorname{sen}(A/2)}} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{S(1 + 2 \cos \frac{A}{2})},$$

y se llega a que las coordenadas de dicho punto se pueden poner de la forma:

$$J_{-A/4} \left( \frac{\operatorname{sen} A}{1 + 2 \cos \frac{A}{2}} : \frac{\operatorname{sen} B}{1 + 2 \cos \frac{B}{2}} : \frac{\operatorname{sen} C}{1 + 2 \cos \frac{C}{2}} \right).$$



Los pies de las perpendiculares por  $X, Y$  y  $Z$  a los lados  $BC, CA$  y  $AB$  (es decir, los puntos de contacto con estos lados de las circunferencias inscritas a los triángulos  $\widehat{IBC}$ ,  $\widehat{AIC}$  y  $\widehat{ABI}$ ) son, respectivamente:

$$\begin{aligned} A_X & \left( 0 : \frac{1}{ac + \sqrt{ac(a - b + c)(a + b + c)} + S_B} : \frac{1}{ab + \sqrt{ab(a + b - c)(a + b + c)} + S_C} \right), \\ B_Y & \left( \frac{1}{bc + \sqrt{bc(-a + b + c)(a + b + c)} + S_A} : 0 : \frac{1}{ba + \sqrt{ba(a + b - c)(a + b + c)} + S_C} \right), \\ C_Z & \left( \frac{1}{cb + \sqrt{cb(-a + b + c)(a + b + c)} + S_A} : \frac{1}{ca + \sqrt{ca(a - b + c)(a + b + c)} + S_B} : 0 \right). \end{aligned}$$

Por lo que son los pies de las cevianas del segundo punto de Malfatti-Rabinowitz ( $X_{1143}$  de ETC):

$$\left( \frac{1}{bc + \sqrt{bc(-a+b+c)(a+b+c)} + S_A} : \dots : \dots \right) = \left( \frac{1}{S_{A/2} + \sqrt{2bcS_{A/2}}} : \dots : \dots \right).$$

Utilizando las mismas expresiones que anteriormente ( $(-a+b+c)(a+b+c) = -a^2 + b^2 + c^2 + 2bc = 2S_A + 2bc = 2S_{A/2}$ ,  $S = bc \operatorname{sen} A$  y  $\operatorname{sen} A = 2 \operatorname{sen}(A/2) \cos(A/2)$ ), las coordenadas de este punto tienen esta forma simple:

$$J_{-A/4}^P \left( \operatorname{tag} \frac{A}{4} : \operatorname{tag} \frac{B}{4} : \operatorname{tag} \frac{C}{4} \right).$$

Resultado al que podíamos haber llegado, directamente, usando pa expresión para  $J_{-A/4}^P$  dada en (16.65).

Por otra parte, si consideramos los puntos  $A' = IX \cap BC$ ,  $B' = IY \cap CA$  y  $C' = IZ \cap AB$ , entonces  $AA'$ ,  $BB'$  y  $CC'$  concurren en el "Yff center of congruence",  $X_{174}$ . Este punto es el "(X(1),X(1))-Answer to question A"; ver la información en el punto  $X_{554}$  de "Encyclopedia of Triangle Centers" de Clark Kimberling:

Supongamos que  $P$  y  $Q$  son centros del triángulo, sean  $Q_a = (Q \text{ del triángulo } \widehat{XBC})$ ,  $Q_b = (Q \text{ del triángulo } \widehat{YBC})$ ,  $Q_c = (Q \text{ del triángulo } \widehat{XAB})$ ,  $A' = PQ_a \cap BC$ ,  $B' = PQ_b \cap CA$  y  $C' = PQ_c \cap AB$ .

"Question A": ¿Para qué puntos  $P$  y  $Q$  las rectas  $AA'$ ,  $BB'$  y  $CC'$  son concurrentes?

— . —

#### 16.4.18

$$\theta_a = A/4$$

Los puntos  $X, Y$  y  $Z$  son los simétricos de los incentros de los triángulos  $\widehat{IBC}$ ,  $\widehat{AIC}$  y  $\widehat{ABI}$ , respecto a los correspondientes lados de  $\widehat{ABC}$  y sus coordenadas son, respectivamente:

$$\begin{aligned} X & \left( -a^2 : ab + \sqrt{2ab(S_C + ab)} + 2S_C : ac + \sqrt{2ac(S_B + ac)} + 2S_B \right), \\ Y & \left( ba + \sqrt{2ba(S_C + ba)} + 2S_C : -b^2 : bc + \sqrt{2bc(S_A + bc)} + 2S_A \right), \\ Z & \left( ca + \sqrt{2ca(S_B + ca)} + 2S_B : cb + \sqrt{2cb(S_A + cb)} + 2S_A : -c^2 \right). \end{aligned}$$

El centro de perspectiva de  $\widehat{XYZ}$  y  $\widehat{ABC}$  es el punto (no está en ETC):

$$J_{A/4} \left( \frac{1}{cb + \sqrt{2cb(S_A + cb)} + 2S_A} : \dots : \dots \right) =$$

$$\left( \frac{1}{(b+c)^2 - a^2 - bc + \sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)}} : \dots : \dots \right) = \left( \frac{\operatorname{sen} A}{1 + 2 \cos A + 2 \cos(A/2)} : \dots : \dots \right).$$

## 16.4.19

$$\theta_a = \frac{\pi - A}{4}$$

Los puntos  $X, Y$  y  $Z$  son, respectivamente, los incentros de los triángulos  $\widehat{I_aCB}$ ,  $\widehat{CI_bA}$  y  $\widehat{BAI_c}$ .

Los cuadrados de las longitudes de los segmentos  $I_aB$  e  $I_aC$  son, respectivamente:

$$\frac{a^2S_A + (a-c)^2S_B + c^2S_C}{(a-b-c)^2} = \frac{ac(a+b-c)}{-a+b+c},$$

$$\frac{a^2S_A + b^2S_B + (a-b)^2S_C}{(a-b-c)^2} = \frac{ab(a-b+c)}{-a+b+c}.$$

Las coordenadas del incentro de  $\widehat{I_aCB}$  son

$$X = \frac{a}{-a+b+c}(-a:b:c) + \sqrt{\frac{ac(a+b-c)}{-a+b+c}}(0:0:1) + \sqrt{\frac{ab(a-b+c)}{-a+b+c}}(0:1:0),$$

$$X \left( -a^2 : \sqrt{ab(a-b+c)(-a+b+c)} + ab : \sqrt{ac(a+b-c)(-a+b+c)} + ac \right).$$

Los cuadrados de las longitudes de los segmentos  $I_bC$  e  $I_bA$  son, respectivamente:

$$\frac{a^2S_A + b^2S_B + (a-b)^2S_C}{(a-b+c)^2} = \frac{ab(-a+b+c)}{a-b+c},$$

$$\frac{(b-c)^2S_A + b^2S_B + c^2S_C}{(a-b+c)^2} = \frac{bc(a+b-c)}{a-b+c}.$$

Las coordenadas del incentro de  $\widehat{CI_bA}$  son

$$Y = \sqrt{\frac{bc(a+b-c)}{a-b+c}}(0:0:1) + \frac{b}{a-b+c}(a:-b:c) + \sqrt{\frac{ab(-a+b+c)}{a-b+c}}(1:0:0),$$

$$Y \left( \sqrt{ab(-a+b+c)(a-b+c)} + ab : -b^2 : \sqrt{bc(a-b+c)(a+b-c)} + bc \right).$$

Los cuadrados de las longitudes de los segmentos  $I_cA$  e  $I_cB$  son, respectivamente:

$$\frac{(b-c)^2S_A + b^2S_B + c^2S_C}{(a+b-c)^2} = \frac{bc(a-b+c)}{a+b-c},$$

$$\frac{a^2S_A + (a-c)^2S_B + c^2S_C}{(a+b-c)^2} = \frac{ac(-a+b+c)}{a+b-c}.$$

Finalmente, las coordenadas del incentro <sup>(1)</sup> de  $\widehat{BAI_c}$  son

$$Z = \sqrt{\frac{bc(a-b+c)}{a+b-c}}(0:1:0) + \sqrt{\frac{ac(-a+b+c)}{a+b-c}}(1:0:0) + \frac{c}{a+b-c}(a:b:-c),$$

<sup>(1)</sup> Las coordenadas de los incentros de los triángulos  $\widehat{I_aCB}$ ,  $\widehat{CI_bA}$  y  $\widehat{BAI_c}$ , respecto de ellos mismos son, respectivamente:

$$\left( a(-a+b+c) : \sqrt{2ac(ac-S_B)} : \sqrt{2ab(ab-S_C)}, \right)$$

$$\left( \sqrt{2bc(bc-S_A)} : b(a-b+c) : \sqrt{2ab(ab-S_C)}, \right)$$

$$\left( \sqrt{2bc(bc-S_A)} : \sqrt{2ac(ac-S_B)} : c(a+b-c) \right).$$

Los puntos que tienen estas coordenadas respecto a  $\widehat{ABC}$ , forman un triángulo perspectivo con aquél, con centro

$$Z \left( ac + \sqrt{ac(-a + b + c)(a + b - c)} : bc + \sqrt{bc(a - b + c)(a + b - c)} : -c^2 \right).$$

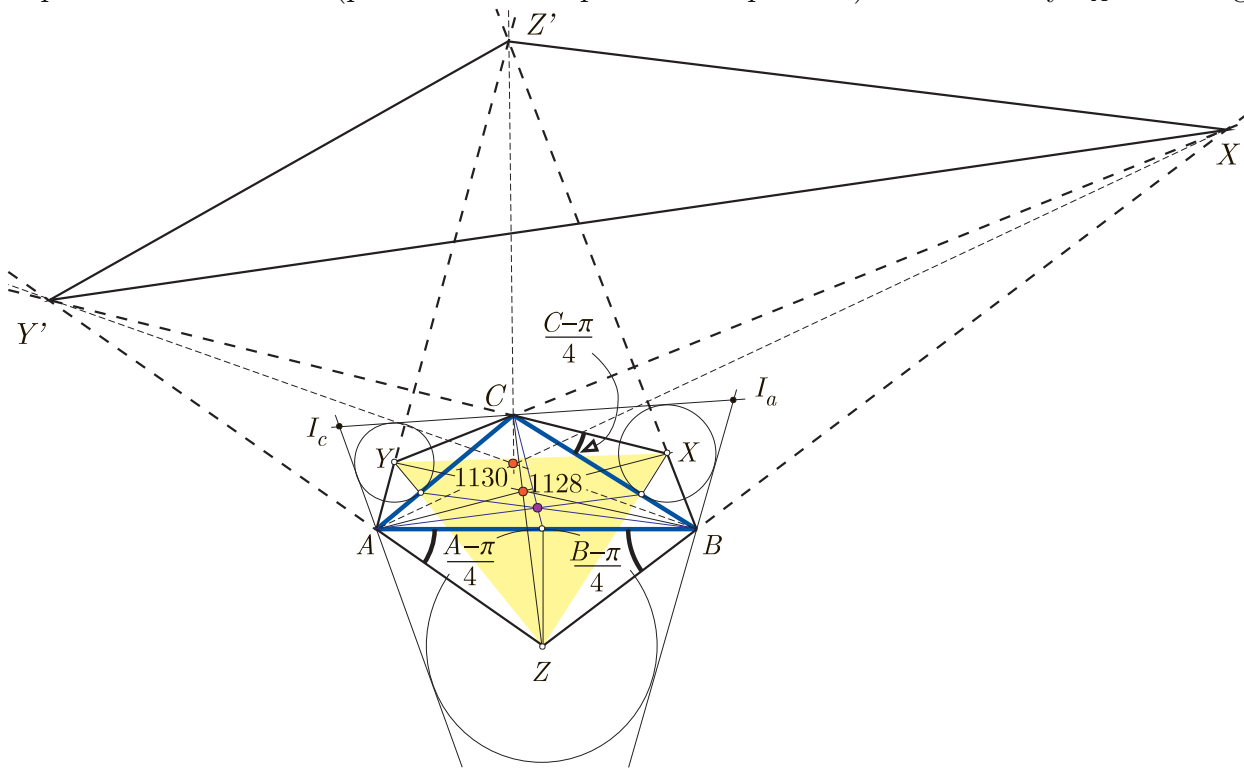
Deducimos de todo esto que  $\widehat{XYZ}$  es perspectivo con  $\widehat{ABC}$  y el centro de perspectividad es el segundo punto de De Villiers ( $X_{1128}$  de ETC), de coordenadas

$$J_{(A-\pi)/4} \left( \frac{1}{bc + \sqrt{bc(a + b - c)(a - b + c)}} : \dots : \dots \right),$$

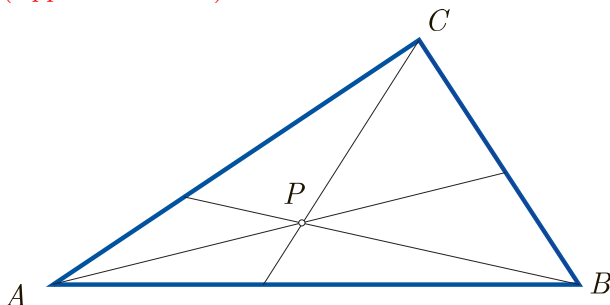
$$\left( \frac{1}{bc + \sqrt{2bc(bc - S_A)}} : \frac{1}{ca + \sqrt{2ca(ca - S_B)}} : \frac{1}{ba + \sqrt{2ba(ba - S_C)}} \right),$$

$$\left( \frac{\text{sen } A}{1 + 2 \text{sen}(A/2)} : \frac{\text{sen } B}{1 + 2 \text{sen}(B/2)} : \frac{\text{sen } C}{1 + 2 \text{sen}(C/2)} \right).$$

Esta última expresión <sup>(1)</sup>, en función de los ángulos, se deduce inmediatamente de la anterior sin más que usar las relaciones (para el caso de la primera componente)  $S = bc \text{sen } A$  y  $S_A = S \text{cotag } A$ .



de perspectividad en el punto de coordenadas:  
(Applet CabriJava)



$$\left( \sqrt{bc(bc - S_A)} : \sqrt{ca(ca - S_B)} : \sqrt{ab(ab - S_C)} \right),$$

$$P \left( \frac{1}{\cos(A/2)} : \frac{1}{\cos(B/2)} : \frac{1}{\cos(C/2)} \right).$$

Este punto es el conjugado isotómico del segundo punto del arco mitad del triángulo anticomplementario, éste es el  $X_{188}$  de ETC.

<sup>(1)</sup> Con MATHEMATICA, podemos usar

```
expr = TrigFactor[1/(Cot[A] + Cot[(Pi - A)/4])]; TrigReduce[Numerator[expr]]/Denominator[expr]
```

Que da directamente

$$\frac{\text{Sin}[A]}{1 + 2\text{Sin}\left[\frac{A}{2}\right]}.$$

Los pies de las perpendiculares por  $X, Y$  y  $Z$  a los lados  $BC, CA$  y  $AB$  son, respectivamente:

$$\begin{aligned} & \left( 0 : ab + \sqrt{ab(-a+b+c)(a-b+c)} - S_C : ac + \sqrt{ac(-a+b+c)(a+b-c)} - S_B \right), \\ & \left( ba + \sqrt{ba(a-b+c)(-a+b+c)} - S_C : 0 : bc + \sqrt{bc(a-b+c)(a+b-c)} - S_A \right), \\ & \left( ca + \sqrt{ca(a+b-c)(-a+b+c)} - S_B : cb + \sqrt{cb(a+b-c)(a-b+c)} - S_A : 0 \right). \end{aligned}$$

Las coordenadas de estos puntos se pueden poner de la forma

$$\begin{aligned} & \left( 0 : \frac{1}{ac + \sqrt{ac(-a+b+c)(a+b-c)} - S_B} : \frac{1}{ab + \sqrt{ab(-a+b+c)(a-b+c)} - S_C} \right), \\ & \left( \frac{1}{bc + \sqrt{bc(a-b+c)(a+b-c)} - S_A} : 0 : \frac{1}{ba + \sqrt{ba(a-b+c)(-a+b+c)} - S_C} \right), \\ & \left( \frac{1}{cb + \sqrt{cb(a+b-c)(a-b+c)} - S_A} : \frac{1}{ca + \sqrt{ca(a+b-c)(-a+b+c)} - S_B} : 0 \right), \end{aligned}$$

por lo que son los pies de las cevianas del punto de coordenadas (no está en ETC):

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{bc - S_A + \sqrt{2bc(bc - S_A)}} : \dots : \dots \right), \\ & \left( \frac{1}{(s-b)(s-c) + \sqrt{bc(s-b)(s-c)}} : \dots : \dots \right), \\ & \left( \frac{\text{sen } A}{1 - \cos A + 2 \text{sen}(A/2)} : \dots : \dots \right) = \left( \frac{\cos(A/2)}{1 + \text{sen}(A/2)} : \dots : \dots \right). \end{aligned}$$

La primera de las expresiones, en función de los ángulos, surge de las mismas relaciones utilizadas en el segundo punto de De Villiers, y la segunda, usando directamente la expresión de  $J^p$  (16.65) para este caso  $\theta_a = (\pi - A)/4$ ; o bien, de la primera usando las expresiones trigonométricas de ángulo mitad.

Señalar, finalmente, en este caso, que los puntos  $A' = BZ \cap CY$ ,  $B' = CX \cap AZ$  y  $C' = AY \cap BX$ , forman un triángulo perspectivo con  $ABC$  y el primer punto de Stevanovic ( $X_{1130}$  de ETC) es su centro de perspectividad:

$$\left( a^2 \left( bc + \sqrt{bc(a-b+c)(a+b-c)} \right) : \dots : \dots \right).$$

Ya que

$$\begin{aligned} & A' \left( (ab + \sqrt{ab(-a+b+c)(a-b+c)})(ac + \sqrt{ac(-a+b+c)(a+b-c)}) : \right. \\ & \left. -b^2(ac + \sqrt{ac(-a+b+c)(a+b-c)}) : -c^2(ab + \sqrt{ab(-a+b+c)(a-b+c)}) \right), \\ & B' \left( -a^2(bc + \sqrt{bc(a-b+c)(a+b-c)}) : \right. \\ & \left. (bc + \sqrt{bc(a-b+c)(a+b-c)})(ab + \sqrt{ab(-a+b+c)(a-b+c)}) : \right. \\ & \left. -c^2(ab + \sqrt{ab(-a+b+c)(a-b+c)}) \right), \\ & C' \left( -a^2(bc + \sqrt{bc(a-b+c)(a+b-c)}) : -b^2(ac + \sqrt{ac(-a+b+c)(a+b-c)}) : \right. \\ & \left. (bc + \sqrt{bc(a-b+c)(a+b-c)})(ac + \sqrt{ac(-a+b+c)(a+b-c)}) \right). \end{aligned}$$



## 16.4.20

$$\theta_a = \frac{A - \pi}{4}$$

Los puntos  $X, Y$  y  $Z$  son los simétricos de los incentros de los triángulos  $\widehat{I_aCB}$ ,  $\widehat{CI_bA}$  y  $\widehat{BAI_c}$  sus coordenadas son, respectivamente:

$$X \left( a^2 : ab + \sqrt{ab(-a+b+c)(a-b+c)} - 2S_C : ac + \sqrt{ac(-a+b+c)(a+b-c)} - 2S_B \right),$$

$$Y \left( ba + \sqrt{ba(a-b+c)(-a+b+c)} - 2S_C : b^2 : bc + \sqrt{bc(a-b+c)(a+b-c)} - 2S_A \right),$$

$$Z \left( ca + \sqrt{ca(a+b-c)(-a+b+c)} - 2S_B : cb + \sqrt{cb(a+b-c)(a-b+c)} - 2S_A : c^2 \right).$$

El centro de perspectividad de  $\widehat{XYZ}$  y  $\widehat{ABC}$  es el punto (no figura en ETC):

$$J_{(\pi-A)/4} \left( \frac{1}{bc - 2S_A + \sqrt{2bc(bc - S_A)}} : \dots : \dots \right) = \left( \frac{\text{sen } A}{1 - 2 \cos A + 2 \text{sen}(A/2)} : \dots : \dots \right).$$

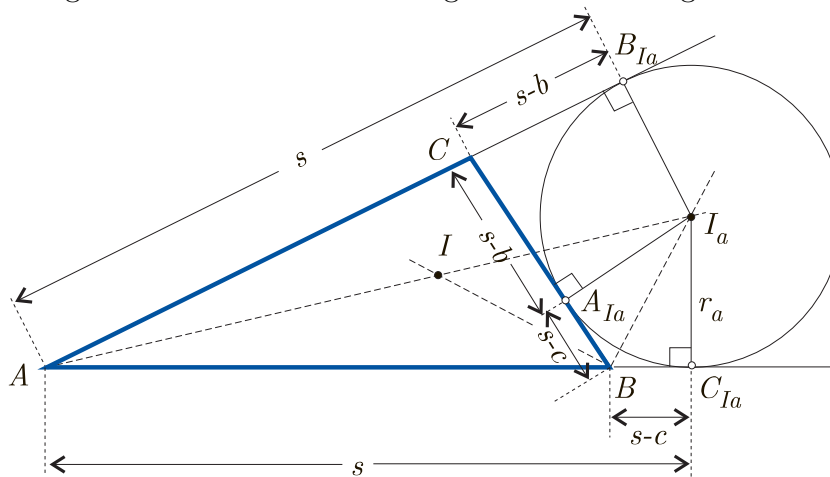
— . . . —

## 16.4.21

$$\theta_a = \text{arctag} \frac{r_c}{s - b + r_c}$$

Sea el trapecio formado por el lado  $BC$  y cuyo lado opuesto es el diámetro de la circunferencia exinscrita  $I_a(r_a)$ , relativa al vértice  $A$ , paralelo a  $BC$ ; sea  $X$  el punto de intersección de las diagonales de este trapecio. Similarmente, se definen cíclicamente los puntos  $Y$  y  $Z$ . Para calcular los valores de los ángulos es este caso, observemos previamente lo siguiente:

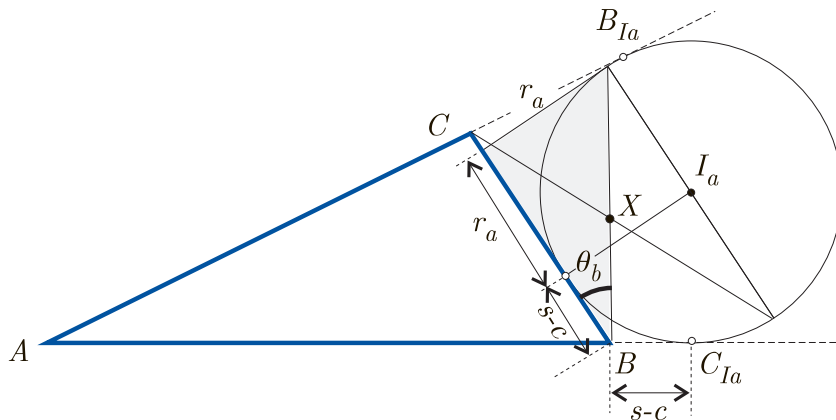
Los puntos de contacto de la circunferencia exinscrita  $I_a(r_a)$  al triángulo  $\widehat{ABC}$ , relativa al vértice  $A$ , con los lados  $BC, CA$  y  $AB$  los denotamos por  $A_{I_a}, B_{I_a}$  y  $C_{I_a}$ , respectivamente. Entonces, se tienen las siguientes relaciones entre magnitudes de los segmentos:



$$AB_{I_a} = AC + CA_{I_a}, \quad AC_{I_a} = AB + BA_{I_a}.$$

Sumando miembro a miembro, se tiene que  $AB_{I_a} + AC_{I_a} = 2s$  y, como  $AB_{I_a} = AC_{I_a}$ , resulta que  $AB_{I_a} = AC_{I_a} = s$ ,  $BA_{I_a} = BC_{I_a} = s - c$  y  $CA_{I_a} = CB_{I_a} = s - b$ . <sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup> Esto nos da otro método para determinar las coordenadas baricéntricas de los puntos de contacto (12.52) de



Entonces, la cotangente del ángulo orientado  $\theta_b$  que forma  $BX$  con  $BC$  es (usando también (2.5)):

$$\cotag \theta_b = \frac{s - c + r_a}{r_a} = \frac{(a + b - c)(b + c - a) + 2S}{2S},$$

y la cotangente del ángulo orientado que forma  $CB$  con  $CX$  es

$$\cotag \theta_c = \frac{s - a + r_b}{r_b} = \frac{(b + c - a)(c + a - b) + 2S}{2S}.$$

Similarmente, obtenemos que la cotangente del ángulo orientado que forma  $AC$  con  $AY$  es

$$\cotag \theta_a = \frac{s - b + r_c}{r_c} = \frac{(c + a - b)(a + b - c) + 2S}{2S}.$$

Obsérvese que las cotangentes de los ángulos orientados que  $CY$  forma con  $CA$ ,  $AZ$  con  $AB$  y  $BA$  con  $BZ$  son, respectivamente,

$$\frac{s - a + r_b}{r_b}, \quad \frac{s - b + r_c}{r_c}, \quad \frac{s - c + r_a}{r_a},$$

que corresponden, por tanto, a las cotangentes de los ángulos  $\theta_c$ ,  $\theta_a$  y  $\theta_b$ , respectivamente.

Sustituyendo estos valores particulares de  $S_{\theta_a}$ ,  $S_{\theta_b}$  y  $S_{\theta_c}$  en (16.64), se obtiene el punto  $X_{1123}$  de ETC, llamado punto de Paasche ( $S = bc \sen A = ca \sen B = ab \sen C$ ):

$$\left( \frac{1}{bc + S} : \frac{1}{ca + S} : \frac{1}{ab + S} \right) = \left( \frac{\sen A}{1 + \sen A} : \frac{\sen B}{1 + \sen B} : \frac{\sen C}{1 + \sen C} \right).$$

Las coordenadas de los puntos  $X, Y$  y  $Z$  son

$$X(-a^2 : ab + S : ac + S), \quad Y(ab + S : -b^2 : bc + S), \quad Z(ac + S : bc + S : -c^2).$$

Los pies de las perpendiculares por  $X, Y$  y  $Z$  a los lados  $BC, CA$  y  $AB$ , respectivamente, son

$$A_X(0 : S - S_C + ab : S - S_B + ac), \quad B_Y(S - S_C + ab : 0 : S - S_A + bc), \quad C_Z(S - S_B + ac : S - S_A + bc : 0).$$

las circunferencias exinscritas con los lados, ya que tenemos las siguientes razones:

$$\frac{BA_{I_a}}{A_{I_a}C} = \frac{s - c}{s - b}, \quad \frac{CB_{I_a}}{B_{I_a}A} = -\frac{s - b}{s}, \quad \frac{AC_{I_a}}{C_{I_a}B} = -\frac{s}{s - c}.$$

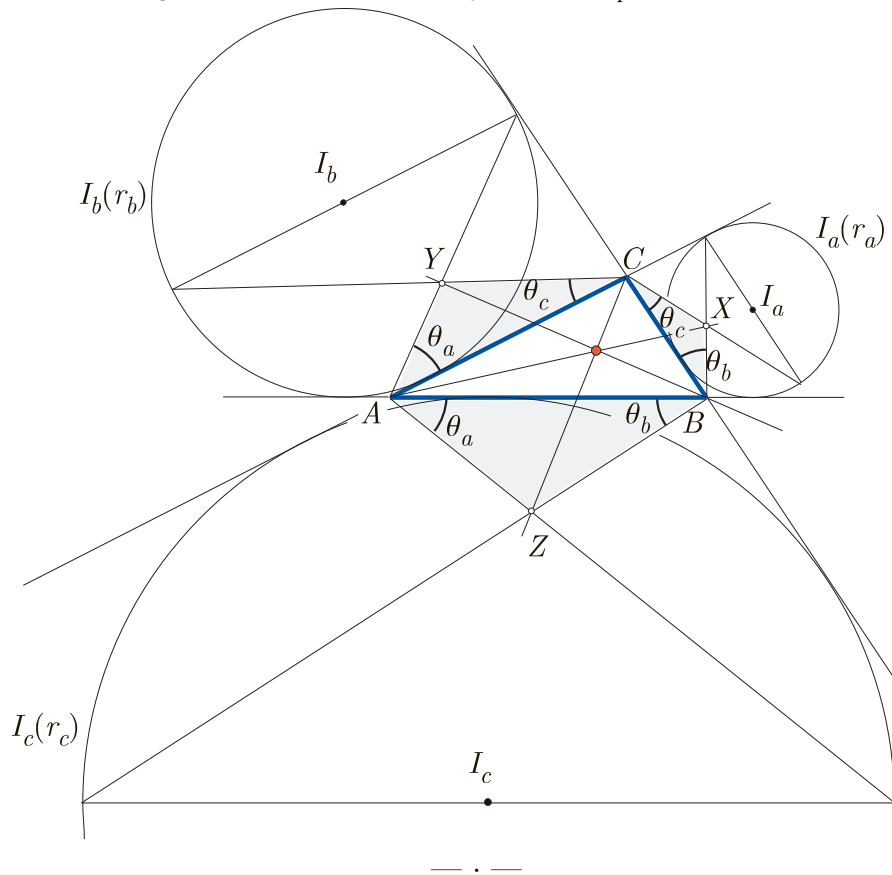
Por tanto, se tiene, en coordenadas baricéntricas homogéneas:

$$A_{I_a}(0 : s - b : s - c), \quad B_{I_a}(s - b : 0 : -s), \quad C_{I_a}(s - c : -s : 0).$$

Estos puntos son los pies de las cevianas del punto (no figura actualmente en ETC):

$$\left( \frac{1}{S - S_A + bc} : \frac{1}{S - S_B + ca} : \frac{1}{S - S_C + ab} \right) = \left( \frac{1}{(a+b-c)(a-b+c) + 2S} : \dots : \dots \right).$$

Esta última expresión, surge directamente sustituyendo en  $J_p$  los valores obtenidos en este caso.



#### 16.4.22

$$\theta_a = \operatorname{arctag} \frac{r_b}{s - c + r_b}$$

Si se toman los otros puntos diagonales  $X'$ ,  $Y'$  y  $Z'$  (distintos de  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  y de los del infinito) de cada uno de los cuadrivértices determinados por los vértices de los trapecios antes considerados, ocurre que las rectas  $AX'$ ,  $BY'$  y  $CZ'$  concurren en el punto de coordenadas

$$\left( \frac{1}{bc - S} : \frac{1}{ca - S} : \frac{1}{ab - S} \right) = \left( \frac{\operatorname{sen} A}{1 - \operatorname{sen} A} : \frac{\operatorname{sen} B}{1 - \operatorname{sen} B} : \frac{\operatorname{sen} C}{1 - \operatorname{sen} C} \right).$$

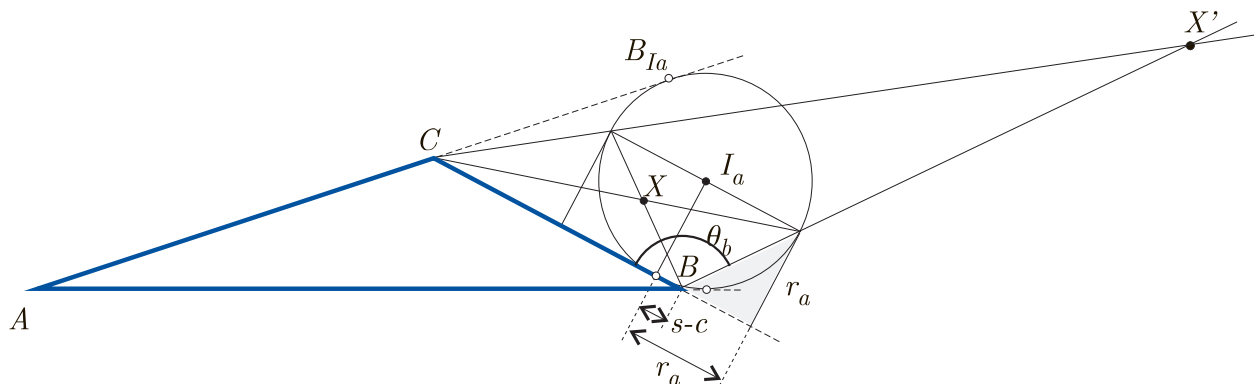
Es el punto  $X_{1336}$  de ETC, definido en ella como el conjugado isogonal del conjugado armónico del conjugado isogonal del  $X_{1123}$  respecto al incentro y simediano (para los conceptos de conjugado isogonal y armónico, ver los párrafos § 14 y § 17, respectivamente).

Para determinar las coordenadas de estos  $X'$ ,  $Y'$  y  $Z'$ , los correspondientes valores relativos a los ángulos  $\theta_a$ ,  $\theta_b$  y  $\theta_c$  son

$$S_{\theta_a} = S \cotag \theta_a = S \frac{s - c - r_b}{r_b} = \frac{(a - b + c)(a + b - c) - 2S}{2},$$

$$S_{\theta_b} = S \cotag \theta_b = S \frac{s - c - r_a}{r_a} = \frac{(-a + b + c)(a + b - c) - 2S}{2},$$

$$S_{\theta_c} = S \cotag \theta_c = S \frac{s-b-r_a}{r_a} = \frac{(-a+b+c)(a-b+c) - 2S}{2}.$$



Con lo que

$$X'(-a^2 : ab - S : ac - S), \quad Y'(ab - S : -b^2 : bc - S), \quad Z'(ac - S : bc - S : -c^2).$$

Los pies de las perpendiculares por  $X', Y'$  y  $Z'$  a los lados  $BC, CA$  y  $AB$ , respectivamente, son  $A_X(0 : S + S_C - ab : S + S_B - ac)$ ,  $B_Y(S + S_C - ab : 0 : S + S_A - bc)$ ,  $C_Y(S + S_B - ac : S + S_A - bc : 0)$ .

Estos puntos son los pies de las cevianas del punto (no figura actualmente en ETC):

$$\left( \frac{1}{S + S_A - bc} : \frac{1}{S + S_B - ca} : \frac{1}{S + S_C - ab} \right) = \left( \frac{1}{(a+b-c)(a-b+c) - 2S} : \dots : \dots \right).$$

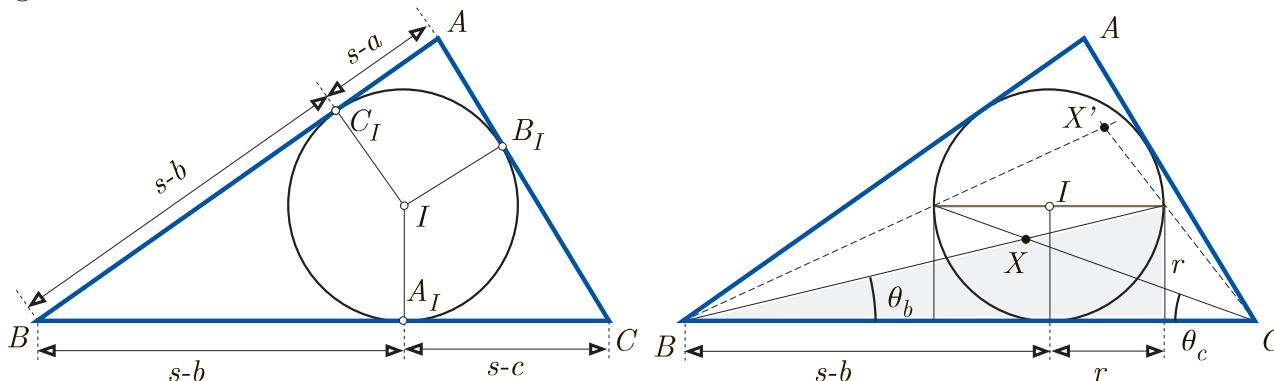
— . —

### 16.4.23

$$\theta_a = \text{arctag} \frac{s-a+r}{r}$$

Si en vez de considerar los diámetros paralelos a los lados de  $\widehat{ABC}$  de las circunferencias exinscritas, se toman diámetros paralelos en la circunferencia inscrita y se consideran análogos cuadrivértices, las correspondientes ternas de puntos diagonales, forman triángulos perspectivos con  $\widehat{ABC}$  con los mismos centros de perspectividad de antes, es decir,  $X_{1123}$  y  $X_{1336}$ :

Para calcular los valores de los ángulos  $\theta_a, \theta_b$  y  $\theta_c$  en este caso, observemos que si los puntos de contacto de la circunferencia inscrita  $I(r)$  al triángulo  $\widehat{ABC}$  con los lados  $BC, CA$  y  $AB$  son  $A_I, B_I$  y  $C_I$ , respectivamente, entonces, se tienen las siguientes relaciones entre magnitudes de los segmentos:



De la relación (y otras análogas),  $s = BA_I + A_I C + AC_I = a + AC_I$ , se obtiene que  $AC_I = AB_I = s - a$ ,  $BA_I = BC_I = s - b$ ,  $CB_I = CA_I = s - c$ . <sup>(1)</sup>

Entonces, para la cotangente del ángulo orientado  $\theta_b$  que forma  $BC$  con  $BX$  se tiene (usando también (2.6)):

$$S_{\theta_b} = S \cotag \theta_b = S \frac{s - b + r}{r} = 2s(s - b) + S,$$

y para la cotangente del ángulo orientado que forma  $CX$  con  $CB$ ,

$$S_{\theta_c} = S \cotag \theta_c = S \frac{s - c + r}{r} = 2s(s - c) + S.$$

Similarmente, obtenemos que para la cotangente del ángulo orientado que forma  $AY$  con  $AC$ ,

$$S_{\theta_a} = S \cotag \theta_a = S \frac{s - a + r}{r} = 2s(s - a) + S.$$

Obsérvese que las cotangentes de los ángulos orientados que  $CA$  forma con  $CY$ ,  $AB$  con  $AZ$  y  $BA$  con  $BZ$  son, respectivamente,

$$\frac{s - c + r}{r}, \quad \frac{s - a + r}{r}, \quad \frac{s - b + r}{r},$$

que corresponden, por tanto, a las cotangentes de los ángulos  $\theta_c$ ,  $\theta_a$  y  $\theta_b$ , respectivamente.

Sustituyendo estos valores particulares de  $S_{\theta_a}$ ,  $S_{\theta_b}$  y  $S_{\theta_c}$  en (16.64) se obtiene el punto de Paasche (atendiéndose a la orientación de los ángulos):

$$\left( \frac{1}{S_A - S_{\theta_a}} : \frac{1}{S_B - S_{\theta_b}} : \frac{1}{S_C - S_{\theta_c}} \right) = \left( \frac{1}{bc + S} : \frac{1}{ca + S} : \frac{1}{ab + S} \right).$$

Las coordenadas de los puntos  $X, Y$  y  $Z$  son

$$X(a^2 : ab + S, ac + S), \quad Y(ba + S : b^2 : bc + S), \quad Z(ca + S : cb + S : c^2).$$

Los pies de las perpendiculares por  $X, Y$  y  $Z$  a los lados  $BC, CA$  y  $AB$ , respectivamente, son  $A_X(0 : ab + S_C + S : ac + S_B + S)$ ,  $B_Y(ba + S_C + S : 0 : bc + S_A + S)$ ,  $C_Z(ab + S_B + S : cb + S_A + S : 0)$ .

Estos puntos son los pies de las cevianas del punto de Yiu-Paasche ( $X_{1659}$  de ETC)

$$\left( \frac{1}{S + S_A + bc} : \frac{1}{S + S_B + ca} : \frac{1}{S + S_C + ab} \right) = \left( \frac{1}{(a + b + c)(b + c - a) + 2S} : \dots : \dots \right).$$

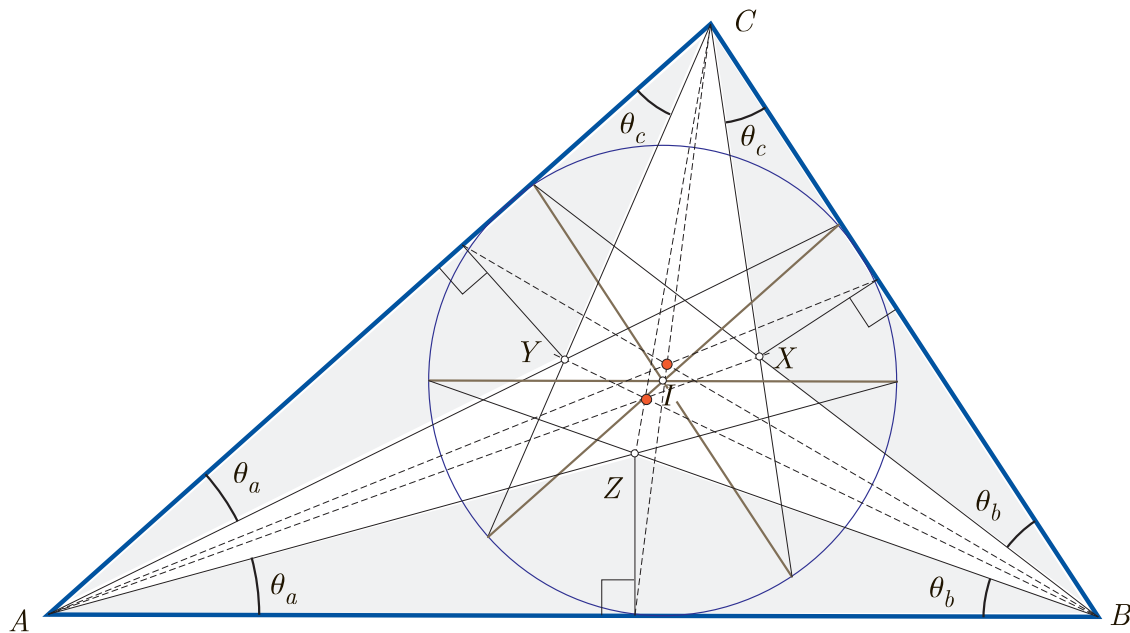
$$\left( \frac{\text{sen } A}{1 + \text{sen } A + \cos A} : \frac{\text{sen } B}{1 + \text{sen } B + \cos B} : \frac{\text{sen } C}{1 + \text{sen } C + \cos C} \right).$$

<sup>(1)</sup> De estas relaciones deducimos las coordenadas baricéntricas de los puntos de contacto (12.50) de la circunferencia inscrita con los lados, ya que tenemos las siguientes razones,

$$\frac{BA_I}{A_I C} = \frac{s - b}{s - c}, \quad \frac{CB_I}{B_I A} = \frac{s - c}{s - a}, \quad \frac{AC_I}{C_I B} = \frac{s - a}{s - b},$$

son, en coordenadas baricéntricas homogéneas,

$$A_I(0 : s - c : s - c), \quad B_I(s - c : 0 : s - a), \quad C_I(s - b : s - a : 0).$$



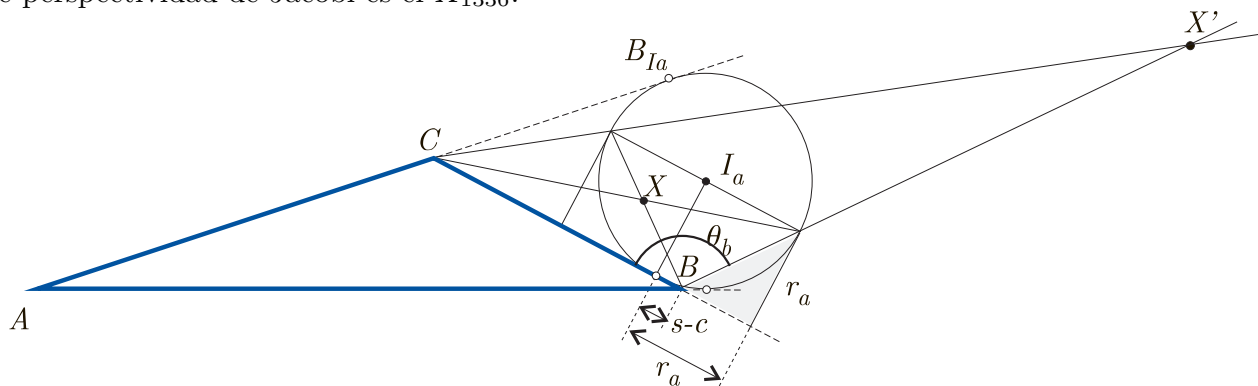
Si se toman los otros puntos diagonales  $X', Y'$  y  $Z'$  (distintos de  $X, Y$  y  $Z$  y de los del infinito) de cada uno de los cuadrivértices determinados por los trapezios antes considerados, se tiene que los correspondientes valores relativos a los ángulos  $\theta_a, \theta_b$  y  $\theta_c$  son

$$S_{\theta_a} = S \cotag \theta_a = S \frac{s - a - r}{r} = 2s(s - a) - S,$$

$$S_{\theta_b} = S \cotag \theta_b = S \frac{s - b - r}{r} = 2s(s - b) - S,$$

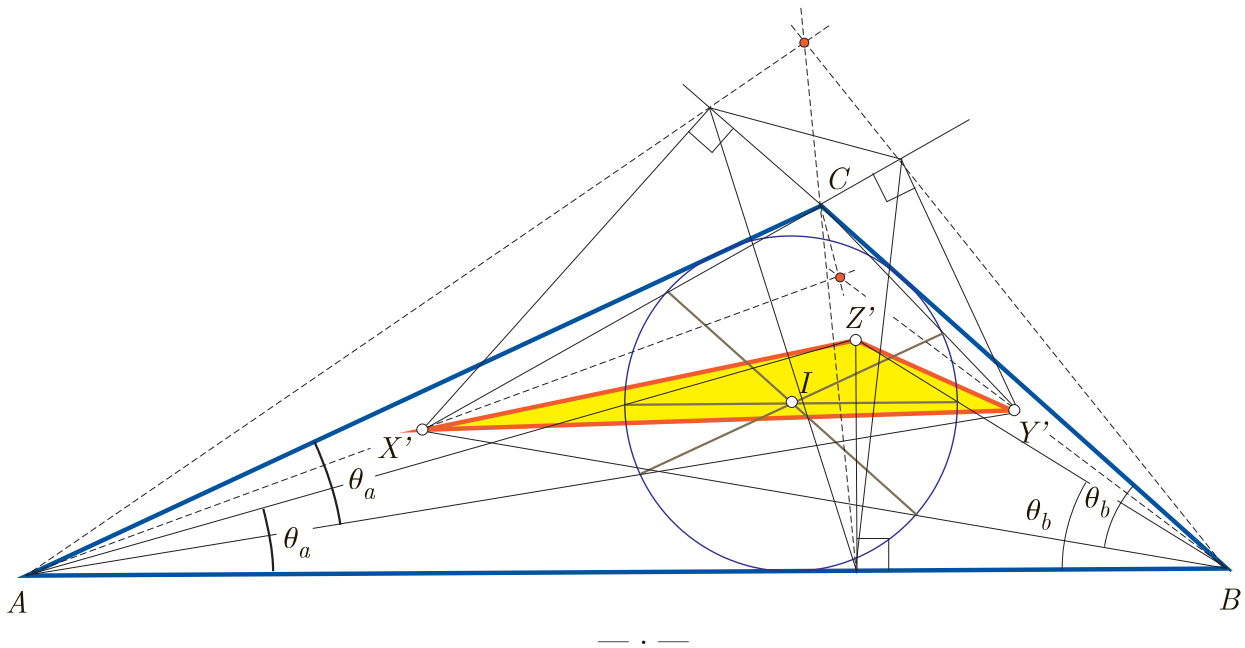
$$S_{\theta_c} = S \cotag \theta_c = S \frac{s - c - r}{r} = 2s(s - c) - S.$$

Con lo que  $X' (a^2 : ab - S : ac - S)$ ,  $Y' (ab - S : b^2 : bc - S)$ ,  $Z' (ac - S : bc - S : c^2)$  y el centro de perspectividad de Jacobi es el  $X_{1336}$ .



Los pies de las perpendiculares por  $X', Y'$  y  $Z'$  a los lados  $BC, CA$  y  $AB$ , respectivamente, son  $A_X(0 : ab - S + S_C : ac - S + S_B)$ ,  $B_Y(ba - S + S_C : 0 : bc - S + S_A)$ ,  $C_Z(ab - S + S_B : cb - S + S_A : 0)$ . Estos puntos son los pies de las cevianas del punto (no figura actualmente en ETC):

$$\left( \frac{1}{bc - S + S_A} : \frac{1}{ca - S + S_B} : \frac{1}{ab - S + S_C} \right) = \left( \frac{1}{(a + b + c)(b + c - a) - 2S} : \dots : \dots \right).$$



## 16.4.24

$$\theta_a = \operatorname{arctag} \frac{r}{s-a}$$

Sea  $X, Y$  y  $Z$  los simétricos del incentro  $I$  de  $\widehat{ABC}$  respecto a los correspondientes lados, entonces las cotangentes de los ángulos orientados  $\theta_a, \theta_b$  y  $\theta_c$  son

$$\frac{s-a}{r} = \frac{2s(s-a)}{S}, \quad \frac{s-b}{r} = \frac{2s(s-b)}{S}, \quad \frac{s-c}{r} = \frac{2s(s-c)}{S};$$

por lo que el centro de perspectividad  $\widehat{XYZ}$  y  $\widehat{ABC}$  es el punto de Gray, ya obtenido en la pág. 80, pues en este caso  $\theta_a = A/2, \theta_b = B/2, \theta_c = C/2$ :

$$\left( \frac{1}{S_A + 2s(s-a)} : \frac{1}{S_B + 2s(s-b)} : \frac{1}{S_C + 2s(s-c)} \right) =$$

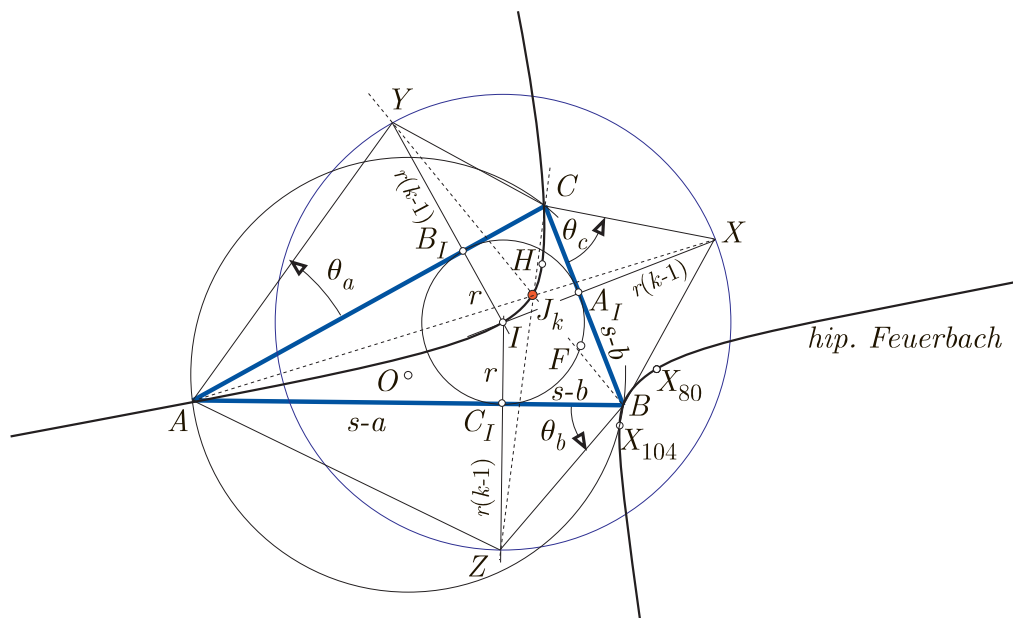
$$\left( \frac{1}{a^2 - b^2 - bc - c^2} : \frac{1}{b^2 - c^2 - ca - a^2} : \frac{1}{c^2 - a^2 - ab - b^2} \right).$$

Este último caso es una situación particular del siguiente:

## 16.4.25

$$\theta_a = \operatorname{arctag} \frac{r(k-1)}{s-a}$$

**Teorema de Kariya.**- La circunferencia homotética de la inscrita a  $\widehat{ABC}$ , mediante la homotecia de centro en el incentro y razón  $k$ , corta a las perpendiculares a los lados por el incentro en puntos que forman un triángulo  $\widehat{XYZ}$  perspectivo con  $\widehat{ABC}$ .



En efecto, usando las expresiones (12.50) de los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con los lados y las fórmulas (5.16) para la homotecia de centro  $I(a : b : c)$  y razón  $k$ , obtenemos que los transformados de los puntos  $A_I(0 : ab + S_C : ac + S_B)$ ,  $B_I(ba + S_C : 0 : bc + S_A)$  y  $C_I(ab + S_B : cb + S_A : 0)$ , son, respectivamente,

$$X(-a^2(k-1) : ab + kS_C : ac + kS_B), \quad Y(ba + kS_C : -b^2(k-1) : bc + kS_A),$$

$$Z(ca + kS_B : cb + kS_A : -c^2(k-1)).$$

Que podemos poner de la forma siguiente:

$$X \left( *** : \frac{1}{ac + kS_B} : \frac{1}{ab + kS_C} \right), \quad Y \left( \frac{1}{bc + kS_A} : *** : \frac{1}{ba + kS_C} \right),$$

$$Z \left( \frac{1}{cb + kS_A} : \frac{1}{ca + kS_B} : *** \right).$$

Por lo que los triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{XYZ}$  son perspectivas, con centro de perspectividad en el punto <sup>(1)</sup>

$$J_k \left( \frac{1}{bc + kS_A} : \frac{1}{ac + kS_B} : \frac{1}{ab + kS_C} \right) = \left( \frac{\text{sen } A}{1 + k \cos A} : \frac{\text{sen } B}{1 + k \cos B} : \frac{\text{sen } C}{1 + k \cos C} \right).$$

Poniendo

$$\Lambda = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - (ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a))}{abc} \quad \text{y} \quad k = k(m, n) = \frac{m}{\Lambda + n},$$

<sup>(1)</sup> El lugar geométrico de estos puntos, cuando la razón  $k$  varía, se obtiene eliminando  $\lambda$  y  $k$  entre las ecuaciones

$$\lambda x = \frac{1}{bc + kS_A}, \quad \lambda y = \frac{1}{ac + kS_B}, \quad \lambda z = \frac{1}{ab + kS_C},$$

resultando:

$$a(bS_B - cS_C)yz + b(cS_C - aS_A)zx + c(aS_A - bS_B)xy = 0.$$

Se trata de la hipérbola de Feuerbach, hipérbola equilátera (pasa por el ortocentro) circunscrita a  $\widehat{ABC}$ , contiene al incentro y su centro es el punto de Feuerbach ( $X_{11}$ ). Utilizando fórmulas de (2.4), su ecuación se puede poner en la forma:

$$a(b-c)(s-a)yz + b(c-a)(s-b)zx + c(a-b)(s-c)xy = 0.$$



los centros de perspectividad deducidos del Teorema de Kariya (contenidos en la hipérbola de Feuerbach), son de la forma:

$$J(m, n) = \left( \frac{1}{mS_A + bc(n + \Lambda)} : \frac{1}{mS_B + ca(n + \Lambda)} : \frac{1}{mS_C + ab(n + \Lambda)} \right).$$

Se tiene que  $J(m, n) = J(k\Lambda, 0) = J_k$ , y se denota por  $J_k^s$  y  $J^s(m, n)$  los simétricos de  $J_k$  y  $J(m, n)$ , respecto al centro (punto de Feuerbach  $X_{11}$ ) de la hipérbola de Feuerbach.

Algunos casos particulares de estos centros de perspectividad de Jacobi, obtenidos a partir del Teorema de Kariya, son:

$k = \frac{m}{\Lambda+n}$	$J_k = J(k\Lambda, 0) = J(m, n)$	Primera coordenada
0	$X_1$ : Incentro $J_0^s = J_{-2} = X_{80}$	$a$
$\infty$	$X_4$ : Ortocentro $J_\infty^s = J(2, 2) = X_{104}$	$\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2}$
1	$X_7$ : Gergonne $J_1^s = J(6, 0) = X_{1156}$	$\frac{1}{b + c - a}$
-1	$X_8$ : Punto de Nagel $J_{-1}^s = J(-2, 4) = X_{1320}$	$b + c - a$
2	$X_{79}$ : Punto de Gray $J_2^s = J(4, 1)$	$\frac{1}{a^2 - b^2 - c^2 - bc}$
-2	$X_{80}$ $J_{-2}^s = J_0$	$\frac{1}{a^2 - b^2 - c^2 + bc}$
$2/\Lambda$	$X_{21}$ : Punto de Schiffler $J^s(2, 0) = J_{\Lambda+1}$	$\frac{a(b + c - a)}{b + c}$
$-2/\Lambda$	$X_?$ $J^s(-2, 0) = J(1 - \Lambda, 1)$	$\frac{a}{(a - b - c)(a(2a + b + c) - (b - c)^2)}$
$4/\Lambda$	$X_{90}$ $J^s(4, 0) = J(2(\Lambda + 2), 4)$	$\frac{a}{a^3 + (b + c)(a^2 - (b - c)^2) - a(b^2 + c^2)}$
$6/\Lambda$	$X_{1156}$ : Conjugado isogonal del punto de Schröder. $J^s(6, 0) = J_1 = X_7$	$\frac{a}{a(-2a + b + c) + (b - c)^2}$
$\frac{2}{\Lambda+2}$	$X_{104}$ : Cuarto punto de intersección de la circunferencia circunscrita y la hipérbola de Feuerbach. $J^s(2, 2) = J_\infty = X_4$	$\frac{a}{(a + b - c)(a - b + c)(b + c) - 2abc}$
$\frac{2}{\Lambda-2}$	$X_{943}$ $J^s(2, -2) = J(\Lambda-1, 2-\Lambda)$	$\frac{a}{2abc + (b + c)(a - b + c)(a + b - c)}$

$\frac{4}{\Lambda+2}$	$X_{84}$ : Conjugado isogonal del punto de Bevan. $J^s(4, 2) = J(2(\Lambda + 4), 2)$	$\frac{a}{a^3 + (b + c)(a(a - b - c) - (b - c)^2)}$
$\frac{4}{\Lambda-2}$	$X_9$ : Punto intermedio $J^s(4, -2) = J(2\Lambda, 6)$	$a(b + c - a)$
$\frac{-2}{\Lambda+4}$	$X_{1320}$ $J^s(-2, 4) = J_{-1} = X_8$	$\frac{a(b + c - a)}{b + c - 2a}$
$\Lambda + 1$	$X_?$ $J_{\Lambda+1}^s = J(2, 0) = X_{21}$	$\frac{b + c - a}{(b + c - a)(b^2 + c^2 - a^2) - abc}$
$\frac{4}{\Lambda+1}$	$X_?$ $J^s(4, 1) = J_2 = X_{79}$	$\frac{a}{a^3 + a^2(b + c) - (b - c)^2(b + c) - a(b^2 + bc + c^2)}$
$\frac{\Lambda+1}{2}$	$X_?$ $J^s(\Lambda - 1, 2 - \Lambda) = J(2, -2) = X_{943}$	$\frac{(a^4(a - b - c) - a^3(2b^2 + bc + 2c^2) + 2a^2(b^3 + c^3) + a(b^4 + b^3c - 2b^2c^2 + bc^3 + c^4) - (b^5 - b^4c - bc^4 + c^5))^{-1}}{}$
$\frac{1-\Lambda}{1+\Lambda}$	$X_?$ $J^s(1 - \Lambda, 1) = J(-2, 0)$	$\frac{(a^5 - a^4(b + c) - a^3(2b^2 - bc + 2c^2) + 2a^2(b - c)^2(b + c) + a((b^2 + c^2)^2 - bc(b^2 - 2bc + c^2)) - (b - c)^4(b + c))^{-1}}{}$
$\frac{2\Lambda}{\Lambda+6}$	$X_?$ $J^s(2\Lambda, 6) = J(4, -2) = X_9$	$\frac{b + c - a}{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + bc}$
$\frac{2(\Lambda+2)}{\Lambda+4}$	$X_?$ $J^s(2(\Lambda + 2), 4) = J(4, 0) = X_{90}$	$\frac{(a^5 - a^4(b + c) - a^3(2b^2 - bc + 2c^2) + a^2(2(b^3 + c^3) + bc(b + c)) + a((b^2 - c^2)^2 - bc(b^2 + c^2)) - (b^5 - b^3c^2 - b^2c^3 + c^5))^{-1}}{}$
$\frac{2(\Lambda+4)}{\Lambda+2}$	$X_?$ $J^s(2(\Lambda + 4), 3) = J(4, 2) = X_{84}$	$\frac{(a^4(a - b - c) - a^3(2b^2 - 3bc + 2c^2) + a^2(2b^3 + b^2c + bc^2 + 2c^3) + a(b^4 - 3b^3c - 3bc^3 + c^4) - (b^5 - b^3c^2 - b^2c^3 + c^5))^{-1}}{}$
$\frac{2}{\Lambda-1}$	$X_?$	$\frac{a}{(a - b + c)(a + b - c)(b + c) + abc}$
$\frac{6}{\Lambda+2}$	$X_?$	$\frac{a}{2a^3 + a^2(b + c) - (b - c)^2(b + c) - 2a(b^2 + bc + c^2)}$
$\frac{6}{\Lambda-2}$	$X_?$	$\frac{a}{2a^3 + a^2(b + c) - (b - c)^2(b + c) - 2a(b^2 - bc + c^2)}$

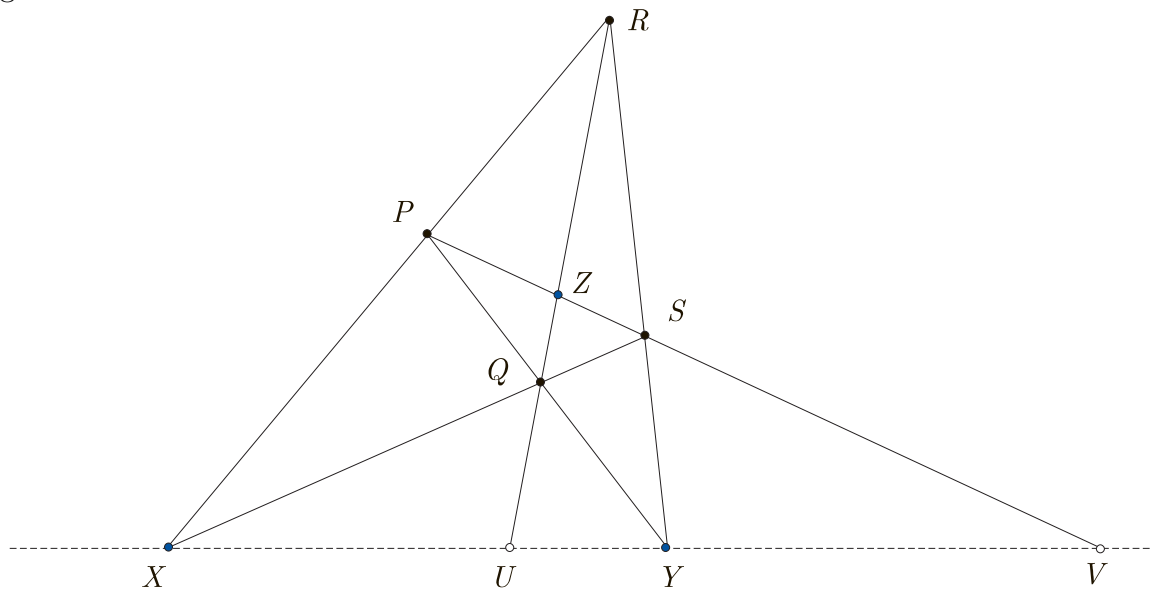
## 17 Polaridad trilineal

**17.1** Recordemos que la razón doble de cuatro puntos alineados  $X, Y, Z$  y  $V$ , que se denota por  $(X Y U V)$ , es el cociente de las razones simples

$$(X Y U V) = \frac{XU}{YU} : \frac{XV}{YV}.$$

En particular, se dice que cuatro puntos alineados  $X, Y, U$  y  $V$ , forman una cuaterna armónica si su razón doble  $(X Y U V) = -1$ .

Como  $(X Y U V) = (Y X V U) = (U V X Y) = (V U Y X) = -1$ , tiene sentido decir que los puntos  $X$  e  $Y$  son conjugados armónicos respecto a  $U$  y  $V$ , y, recíprocamente,  $U$  y  $V$  son conjugados armónicos de  $X$  e  $Y$ .



Para determinar gráficamente el conjugado armónico de  $X$  respecto a  $U$  y  $V$ , se utiliza el **resultado** de que:

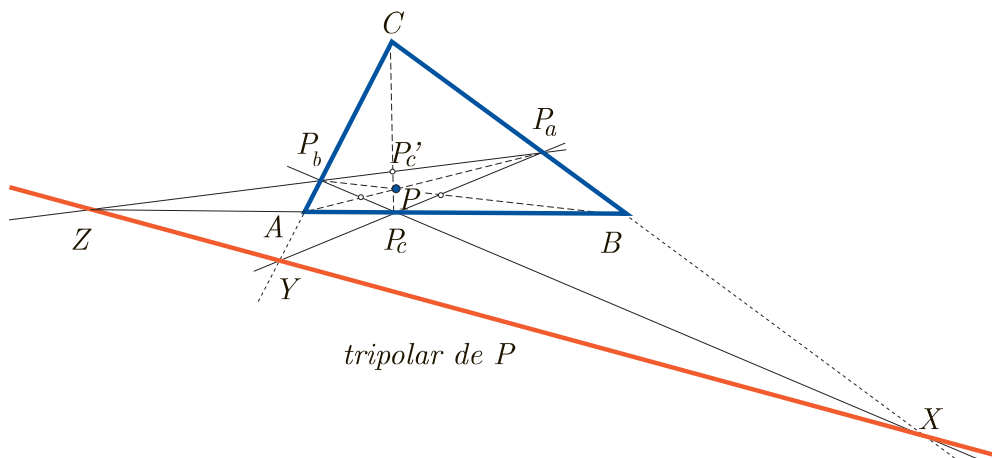
En cualquier cuadrivértice dos puntos diagonales son conjugados armónicos de los dos puntos en que la recta que los une corta a los dos lados opuestos del cuadrivértice que pasan por el tercer punto diagonal.

Y procedemos de la forma siguiente:

Sea  $P$  un punto no perteneciente a la recta  $XY$ . Se trazan las rectas  $PX$  y  $PY$ . Sea  $Q$  otro punto en  $PY$ . Se traza la recta  $UQ$  y sean los puntos  $R = UQ \cap XP$  y  $S = YR \cap XQ$ . Entonces en el cuadrivértice  $PQRS$ , la diagonal  $PS$  corta a  $XY$  en el punto  $V$ , buscado.

**17.2** Un triángulo  $\widehat{ABC}$  induce una correspondencia entre puntos, no situados en los lados, y rectas, que no pasen por los vértices. A esta correspondencia se le denomina polaridad trilineal y se define de la forma siguiente:

Dado un punto  $P$ , al eje de perspectividad de  $\widehat{ABC}$  y su triángulo ceviano  $\widehat{P_a P_b P_c}$ , es decir, a la recta determinada por los puntos  $X = BC \cap P_b P_c$ ,  $Y = CA \cap P_c P_a$  y  $Z = AB \cap P_a P_b$ , se le denomina polar trilineal (o tripolar) de  $P$ , con respecto a  $\widehat{ABC}$ .

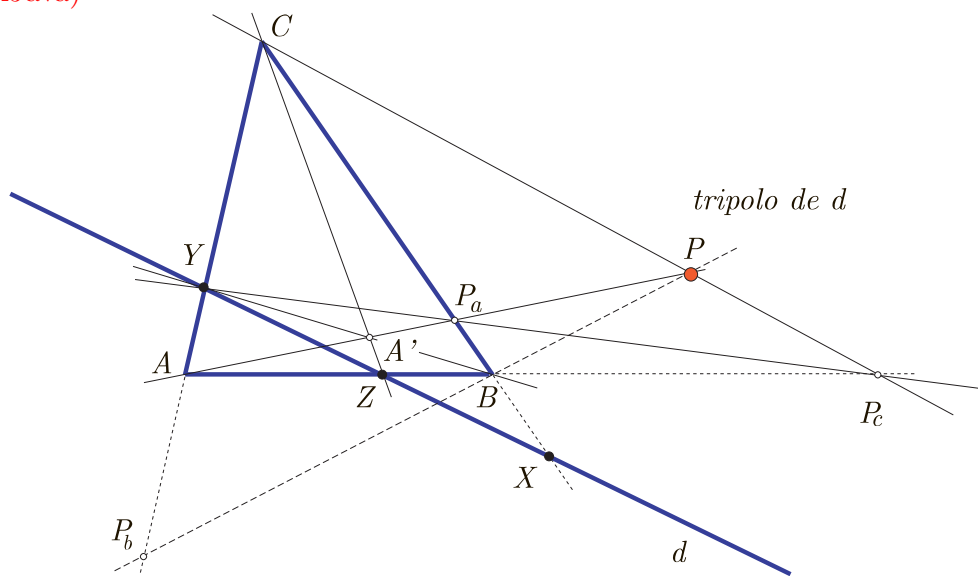


El **polo trilineal** (o **tripolo**) de una recta  $d$  es el punto tal que su tripolar es  $d$ . Para determinarlo, sólo hay que tener presente que, con la notación anterior,

$$(X P_a B C) = -1, \quad (Y P_b C A) = -1, \quad (Z P_c A B) = -1,$$

pues, en el cuadrivértice  $CP_aPP_b$ , los puntos diagonales  $A$  y  $B$  están armónicamente separados de los dos puntos en que la recta  $AB$  corta a los dos lados opuestos  $CP$  y  $P_aP_b$  del cuadrivértice, que pasan por el tercer punto diagonal  $P'_c$  (similarmente para los otros dos casos). Esto da un método para construir el tripolo de una recta: si ésta corta a los lados opuestos de los vértices  $A, B$  y  $C$  en los puntos  $X, Y$  y  $Z$ , respectivamente, sea  $A' = YB \cap CZ$ ,  $P_a = AA' \cap BC$  y  $P_c = YP_a \cap AB$ , entonces, el tripolo de  $XYZ$  es el punto  $P = AA' \cap CP_c$ .

(Applet CabriJava)



Para obtener la expresión analítica de la tripolar de  $P(u : v : w)$ , sean los pies de sus cevianas  $P_a(0 : v : w)$ ,  $P_b(u : 0 : w)$  y  $P_c(u : v : 0)$ , y, por tanto

$$P_bP_c : -vwx + uwy + uvz = 0, \quad P_cP_a : vwx - uwy + uvz = 0, \quad P_aP_b : vwx + uwy - uvz = 0.$$

Y los puntos de intersección de éstas con los correspondientes lados de  $\widehat{ABC}$  son

$$X(0 : v : -w), \quad Y(-u : 0 : w), \quad Z(u : -v : 0).$$

Así, la ecuación de la recta que los contiene (tripolar de  $P$ ) es

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 0. \tag{17.67}$$

A pesar de recibir esta correspondencia, entre puntos y rectas y entre rectas y puntos, el nombre de polaridad trilineal, no es en realidad **una polaridad**, pues, a parte de no estar definida sobre puntos de los lados ni sobre rectas que pasen por los vértices, a rectas concurrentes no le corresponden puntos alineados. En efecto:

Para las rectas  $ux + vy + wz = 0$  que pasan por el punto  $P(x_0 : y_0 : z_0)$  se verifica que  $ux_0 + vy_0 + wz_0 = 0$ , por lo que el lugar geométrico, descrito por sus tripolos  $(1/u : 1/v : 1/w)$  satisfacen a  $x_0yz + y_0zx + z_0xy = 0$ , que es la ecuación de una curva que pasa por los vértices  $A, B$  y  $C$  (cónica circunscrita, denominada cónica polar de  $P$  con respecto al triángulo).

Como ejemplo, las tripolares de los puntos de Nagel y de Gergonne son

$$\frac{x}{s-a} + \frac{y}{s-b} + \frac{z}{s-c} = 0, \quad (s-a)x + (s-b)y + (s-c)z = 0,$$

que se cortan en punto ( $X_{650}$  de ETC):

$$(a(b-c)(b+c-a) : b(c-a)(c+a-b) : c(a-b)(a+b-c)).$$

Este punto es el centro de perspectividad de  $\widehat{ABC}$  y el triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección de los correspondientes lados de los triángulos órtico y de contacto interior. En efecto:

Los lados del triángulo órtico tienen por ecuaciones

$$H_aH_b : S_Ax + S_By - S_Cz = 0, \quad H_bH_c : -S_Ax + S_By + S_Cz = 0, \quad H_cH_a : S_Ax - S_By + S_Cz = 0.$$

Las ecuaciones de los lados del triángulo de contacto interior son

$$A_I B_I : (bc + S_A)x + (ac + S_B)y - (ab + S_C)z = 0,$$

$$B_I C_I : -(bc + S_A)x + (ac + S_B)y + (ab + S_C)z = 0,$$

$$C_I A_I : (bc + S_A)x - (ac + S_B)y + (ab + S_C)z = 0.$$

Los lados correspondientes de estos triángulos se cortan en los puntos

$$A'(a(bS_B - cS_C) : b(aS_A - cS_C) : c(-aS_A + bS_B)),$$

$$B'(a(-bS_B + cS_C) : b(-aS_A + cS_C) : c(-aS_A + bS_B)),$$

$$C'(a(-bS_B + cS_C) : b(aS_A - cS_C) : c(aS_A - bS_B)).$$

El centro de perspectividad de  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{A'B'C'}$  es <sup>(1)</sup>

$$(a(bS_B - cS_C) : b(cS_C - aS_A) : c(aS_A - bS_B)) = \\ (a(b-c)(b+c-a) : b(c-a)(c+a-b) : c(a-b)(a+b-c)).$$

## 18 Conjugado isotómico. Complemento y anticomplemento. Cociente ceviano

<sup>(1)</sup> Este punto es el centro de la circunferencia ortogonal a las cinco circunferencias: circunscrita, de los nueve puntos y exinscritas de  $\widehat{ABC}$  y la circunferencia ortogonal a las exinscritas (Milorad R. Stevanović.- The Apollonius Circle and Related Triangle Centers. Forum Geometricorum **3** (2003) 187–195).

**18.1** El punto simétrico del pie de la ceviana  $P_a(0 : v : w)$  de un punto  $P(u : v : w)$ , respecto al punto medio  $M_a(0 : 1 : 1)$ , del correspondiente lado del triángulo  $\widehat{ABC}$ , es el punto  $P'_a(0 : w : v)$ , puesto que  $PP'_a : P'_aM_a = -2 : 1$ ; análogamente, se obtienen los puntos  $P'_b(w : 0 : u)$  y  $P'_c(v : u : 0)$ , simétricos respecto a  $M_b(1 : 0 : 1)$  y  $M_c(1 : 1 : 0)$ . Los tres pueden ponerse bajo la forma

$$P'_a \left( 0 : \frac{1}{v} : \frac{1}{w} \right), \quad P'_b \left( \frac{1}{u} : 0 : \frac{1}{w} \right), \quad P'_c \left( \frac{1}{u} : \frac{1}{v} : 0 \right),$$

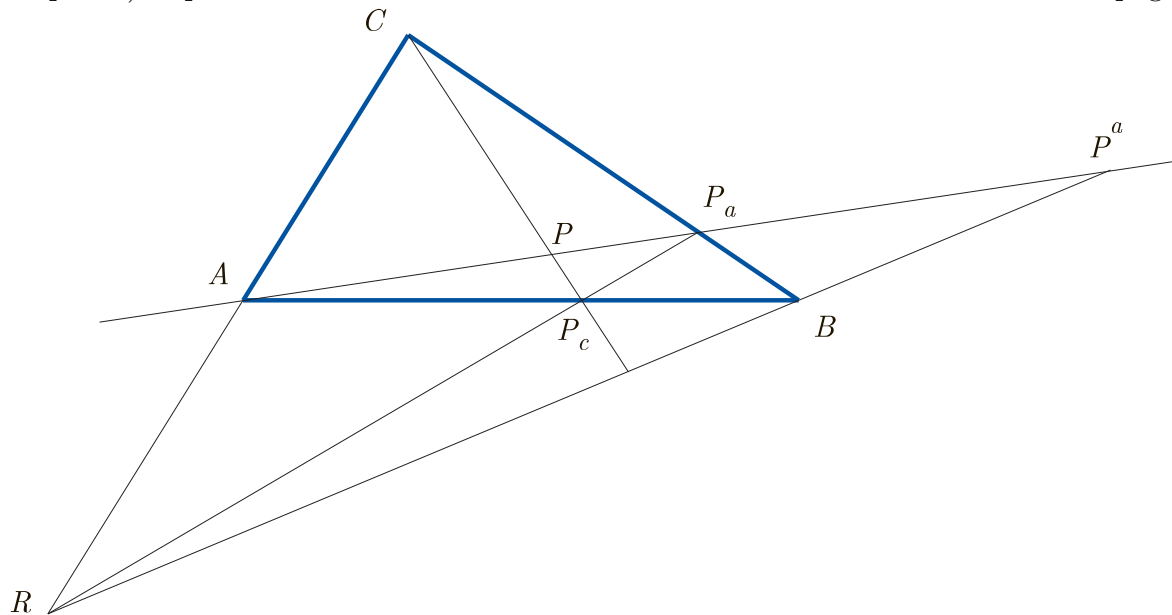
por lo que son los pies de las cevianas del punto  $P^\bullet \left( \frac{1}{u} : \frac{1}{v} : \frac{1}{w} \right)$ , denominado conjugado isotómico de  $P$ .

Como ejemplos de puntos conjugados isotómicos están, entre otros, el punto de Nagel (pág. 34) y de Gergonne (pág. 34):

$$N_a(s - a : s - b : s - c), \quad G_e \left( \frac{1}{s - a} : \frac{1}{s - b} : \frac{1}{s - c} \right).$$

El centro de perspectividad ( $S_A : S_B : S_C$ ) de  $\widehat{ABC}$  y del triángulo órtico del punto de De Longschamps (pág 36) es el conjugado isotómico del ortocentro  $H(S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B)$ .

**18.2** Dado un punto  $P(u : v : w)$ , su conjugado armónico  $P^a$  respecto a  $A$  y  $P_a$  (pie de su ceviana por  $A$ ) se puede determinar utilizando la el método de construcción dado en la página 99:



En el cuadrivértice  $BCRP_c$  ( $P_c$  es el pie de la ceviana de  $P$  por  $C$ ), el conjugado armónico de  $P$  respecto a sus puntos diagonales  $A$  y  $P_a$  es el punto  $P^a$  de corte de las rectas  $AP_a$  y  $BR$ . El punto  $R(u : 0 : -w)$  es el de intersección de la recta  $P_a P_c$ ,  $wx + uy = 0$ , con  $AC$  ( $y = 0$ ).  $P^a$  es el punto de corte de las rectas  $AP_a$ ,  $wy - vz = 0$ , con  $BR$ ,  $wz + uz = 0$ .

Procediendo de forma análoga para determinar los conjugados armónicos  $P^b$  y  $P^c$  de  $P$  respecto a  $B$  y  $P_b$  y a  $C$  y  $P_c$ , se tiene que

$$P^a(-u : v : w), \quad P^b(u : -v : w), \quad P^c(u : v : -w).$$

Otra vía para obtener las coordenadas de estos puntos, puede ser haciendo uso de que, por ejemplo para  $P^a$ , se tiene

$$(P P^a A P_a) = \frac{PA}{PP_a} : \frac{P^a A}{P^a P_a} = -1, \quad \text{o sea} \quad \frac{AP^a}{P^a P_a} = -\frac{AP}{PP_a} = \frac{v + w}{-u},$$

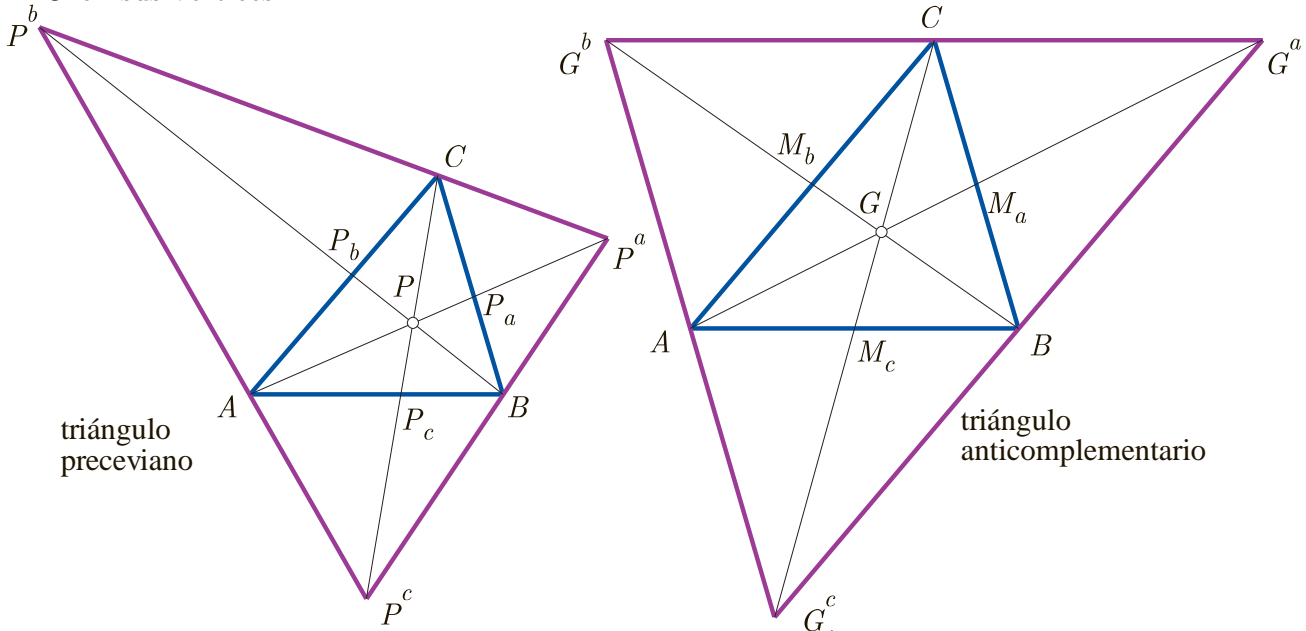
con lo que las coordenadas ce  $P^a$  son  $-u(v+w : 0 : 0) + (v+w)(0 : v : w) = (-u : v : w)$ . Siguiendo este mismo método, se llega a las coordenadas  $P^b(u : -v : w)$  y  $P^c(u : v : -w)$ .

Al triángulo  $\widehat{P^a P^b P^c}$  se le denomina triángulo preceviano o anticeviano de  $\widehat{ABC}$ , terminología justificada por el hecho de que  $\widehat{ABC}$  es el triángulo ceviano de  $P$  en  $\widehat{P^a P^b P^c}$ .

Al triángulo preceviano del simediano  $K(a^2 : b^2 : c^2)$ , que tiene por vértices

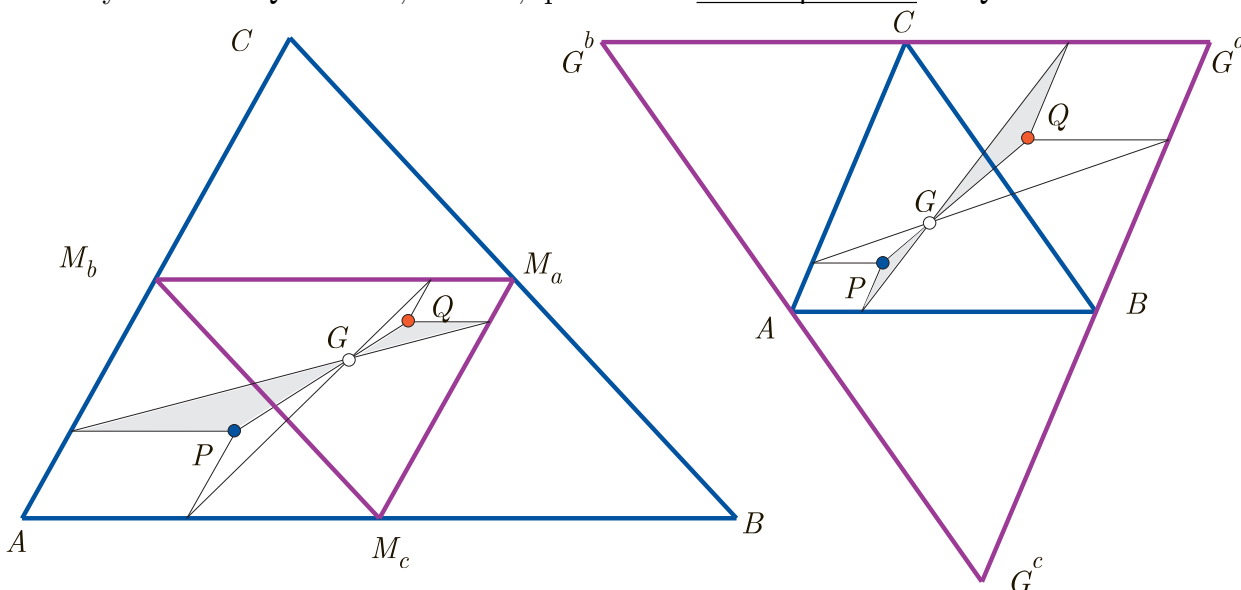
$$(-a^2 : b^2 : c^2), \quad (a^2 : -b^2 : c^2), \quad (a^2 : b^2 : -c^2),$$

se le denomina triángulo tangencial, pues sus lados son tangente a la circunferencia circunscrita a  $\widehat{ABC}$  en sus vértices.



En el caso particular de que  $P$  sea el baricentro  $G$  de  $\widehat{ABC}$ , el triángulo ceviano de  $G$  es el triángulo medial y a su triángulo preceviano se le conoce como triángulo anticomplementario de vértices  $(-1 : 1 : 1), (1 : -1 : 1), (1 : 1 : -1)$ .

El complemento de un punto  $P$ , respecto a un triángulo, es el punto  $Q$ , tal que  $P, G$  y  $Q$  están alineados y  $PG = 2GQ$ . Se dice, además, que  $P$  es el anticomplemento de  $Q$ .



Si  $P(u : v : w)$ , su complemento  $Q$ , para el que se verifica  $PQ : QG = 3 : -1$ , es

$$Q(v+w : w+u : u+v),$$

y las coordenadas de  $Q(u^* : v^* : w^*)$  respecto al triángulo medial son las mismas que las de  $P$  respecto a  $\widehat{ABC}$ , es decir,  $(u : v : w)$ .

El anticomplemento  $Q$  de  $P(u : v : w)$ , que verifica  $PQ : QG = 3 : -2$ , es

$$Q(-u + v + w : u - v + w : u + v - w),$$

que tiene coordenadas  $(u : v : w)$  respecto al triángulo anticomplementario de  $\widehat{ABC}$ .

### 18.3 Algunos ejemplos:

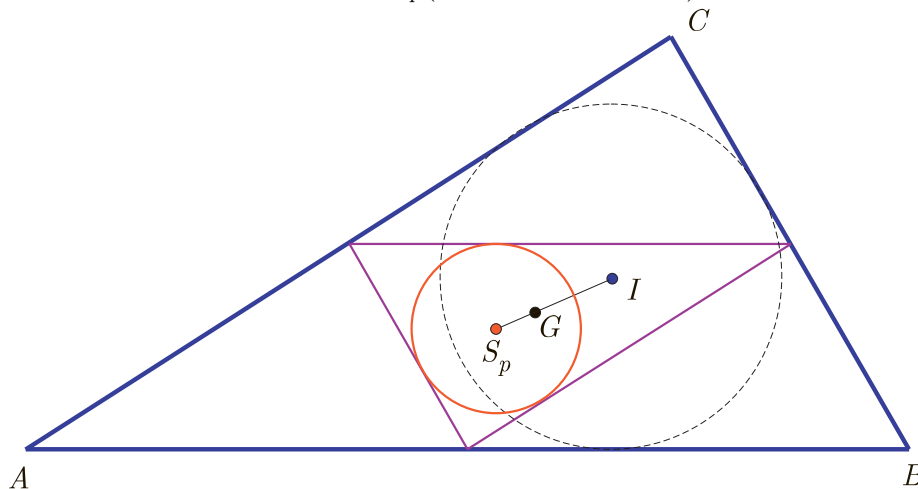
**I.** El punto  $P_i$  de paralelas iguales (pág. 5) es el anticomplementario del conjugado isotómico del incentro; en efecto, como el conjugado isotómico del incentro es  $I^\bullet \left( \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} \right)$ ,  $X_{75}$  en ETC, se ha de verificar que  $I^\bullet P_i : P_i G = 3 : -2$ ; lo cual ocurre pues las coordenadas de  $P_i$  son  $\left( -\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} : \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} : \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)$ .

**II.** El conjugado isotómico del simediano  $K(a^2 : b^2 : c^2)$  es el tercer punto de Brocard (pág. 66).

**III.** El conjugado isotómico del  $X_{312}(bc(-a + b + c) : ca(a - b + c) : ab(a + b - c))$  (pág. 45) es el  $X_{57}$  (pág. 37) y éste es el conjugado isogonal del punto intermedio (pág. 37).

**IV.** El complemento del tercer punto de Brocard  $(1/a^2 : 1/b^2, 1/c^2)$  es el punto medio de  $\Omega_1\Omega_2$  (pág 58),  $((c^2 + b^2)/b^2c^2 : \dots : \dots)$ .

**V.** El centro de la circunferencia inscrita al triángulo medial es el complemento del incentro, ya que tal circunferencia es la homotética de la inscrita mediante la homotecia de centro en  $G$  y razón  $-1/2$ . Se trata del punto de Spieker  $S_p(b + c : c + a : a + b)$ ,  $X_{10}$  de ETC.



**VI.** El triángulo ceviano  $\widehat{P_a P_b P_c}$  de un punto  $P(u : v : w)$  y el triángulo preceviano  $\widehat{Q^a Q^b Q^c}$  de  $Q(x : y : z)$  son perspectivas y su centro de perspectividad se conoce como el cociente ceviano de  $P$  y  $Q$  y se designa por  $P/Q$ .

Los coeficientes o coordenadas de las rectas  $P_a Q^a, P_b Q^b, P_c Q^c$  son

$$P_a Q^a(-wy + vz : -wx : vx), \quad P_b Q^b(wy : wx - uz : -uy), \quad P_c Q^c(-vz : uz : -vx + uy).$$

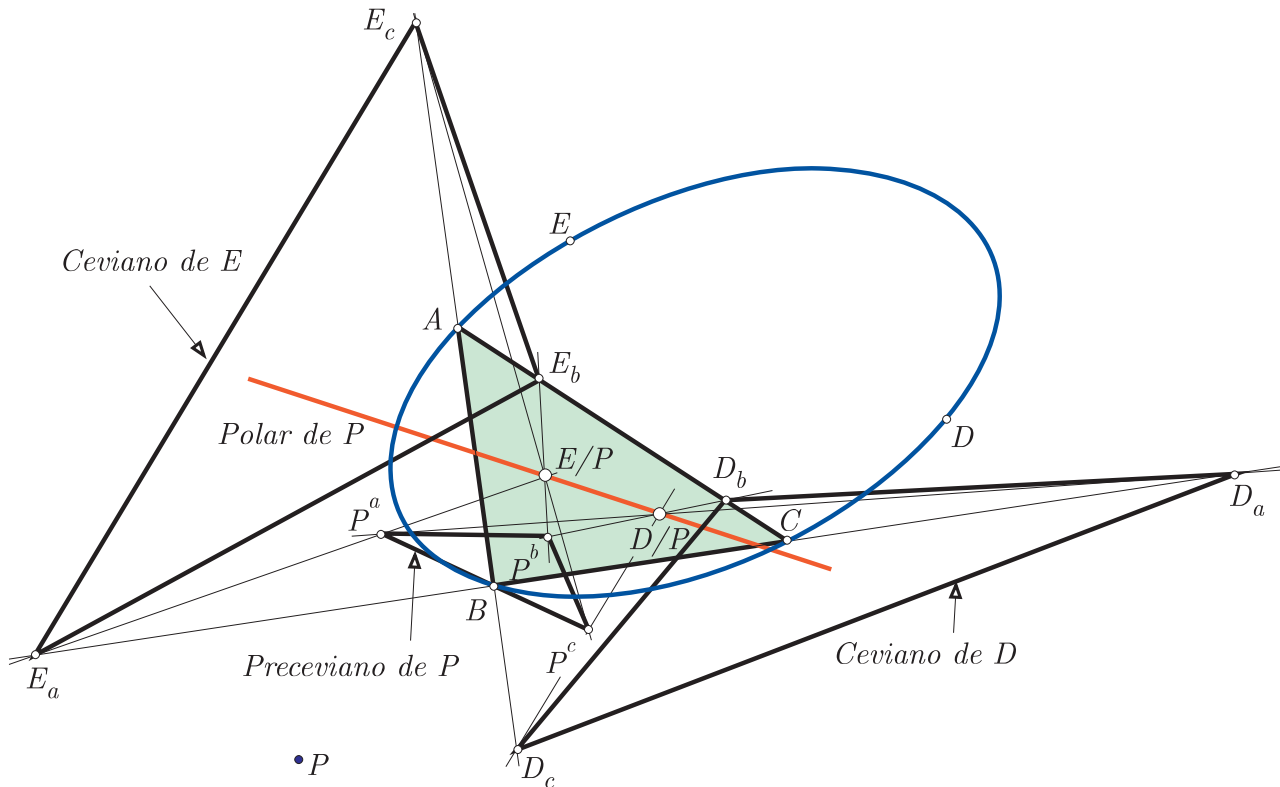
La suma de las dos primeras da la tercera; por lo que las tres rectas son concurrentes. Su punto de intersección es:

$$P/Q \left( x \left( -\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} \right) : y \left( \frac{x}{u} - \frac{y}{v} + \frac{z}{w} \right) : z \left( \frac{x}{u} + \frac{y}{v} - \frac{z}{w} \right) \right).$$



Hay una forma de obtener la polar de un punto respecto a una cónica usando el cociente ceviano:

Dados una cónica, por cinco puntos  $A, B, C, D, E$ , y un punto  $P$ , la polar de  $P$  respecto a la cónica es la recta que pasa por los cocientes cevianos  $D/P$  y  $E/P$  (respecto a  $\triangle ABC$ ).



En efecto, si  $P(x_0 : y_0 : z_0)$ ,  $D(u_4 : v_4 : w_4)$  y  $E(u_5 : v_5 : w_5)$ , entonces

$$D/P \left( x_0 \left( -\frac{x_0}{u_4} + \frac{y_0}{v_4} + \frac{z_0}{w_4} \right) : y_0 \left( \frac{x_0}{u_4} - \frac{y_0}{v_4} + \frac{z_0}{w_4} \right) : z_0 \left( \frac{x_0}{u_4} + \frac{y_0}{v_4} - \frac{z_0}{w_4} \right) \right),$$

$$E/P \left( x_0 \left( -\frac{x_0}{u_5} + \frac{y_0}{v_5} + \frac{z_0}{w_5} \right) : y_0 \left( \frac{x_0}{u_5} - \frac{y_0}{v_5} + \frac{z_0}{w_5} \right) : z_0 \left( \frac{x_0}{u_5} + \frac{y_0}{v_5} - \frac{z_0}{w_5} \right) \right)$$

La ecuación de la cónica es

$$(u_4 u_5 v_5 w_4 - u_4 u_5 v_4 w_5) y z + (-u_5 v_4 v_5 w_4 + u_4 v_4 v_5 w_5) z x + (u_5 v_4 w_4 w_5 - u_4 v_5 w_4 w_5) x y = 0.$$

La polar de  $P(x_0 : y_0 : z_0)$  es:

$$\begin{pmatrix} 0 & (u_5 v_4 - u_4 v_5) w_4 w_5 & -v_4 v_5 (u_5 w_4 - u_4 w_5) \\ (u_5 v_4 - u_4 v_5) w_4 w_5 & 0 & u_4 u_5 (v_5 w_4 - v_4 w_5) \\ -v_4 v_5 (u_5 w_4 - u_4 w_5) & u_4 u_5 (v_5 w_4 - v_4 w_5) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (u_5 v_4 - u_4 v_5) w_4 w_5 y_0 - v_4 v_5 (u_5 w_4 - u_4 w_5) z_0 \\ (u_5 v_4 - u_4 v_5) w_4 w_5 x_0 + u_4 u_5 (v_5 w_4 - v_4 w_5) z_0 \\ -v_4 v_5 (u_5 w_4 - u_4 w_5) x_0 + u_4 u_5 (v_5 w_4 - v_4 w_5) y_0 \end{pmatrix},$$

que coincide con los coeficientes de la recta que pasa por los cocientes cevianos  $D/P$  y  $E/P$ .  $\square$

**VII.** Dado un triángulo  $\widehat{ABC}$  y un punto  $P$ , sean  $A', B'$  y  $C'$  los centros de las semejanzas directas que llevan  $\overrightarrow{CP}$  en  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AP}$  en  $\overrightarrow{BC}$  y  $\overrightarrow{BP}$  en  $\overrightarrow{CA}$ , respectivamente. Entonces,  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{A'B'C'}$  son perspectivas y el centro de perspectividad es el conjugado isogonal del complemento de  $P$ .

Sea un punto  $P(u : v : w)$  y  $P_a(0 : v : w), P_b(u : 0 : v)$  y  $P_c(u : v : 0)$  los pies de sus cevianas. El centro de semejanza directa [16, Tomo I, pág.121] que lleva  $\overrightarrow{BP}$  en  $\overrightarrow{CA}$  es el punto (distinto de  $P_b$ ) de intersección de las circunferencias  $CAP_b$  y  $BPP_b$ , cuyas ecuaciones se obtienen sustituyendo en la ecuación general de una circunferencia (19.71) las coordenadas de los puntos que las determinan, y son, respectivamente:

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z) \frac{c^2u}{u + v}y = 0,$$

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z) \left( \frac{vc^2x}{u + v} + \frac{(v^2a^2 + b^2u^2 + (a^2 + b^2 - c^2)uv)z}{(u + v)(u + v + w)} \right) = 0.$$

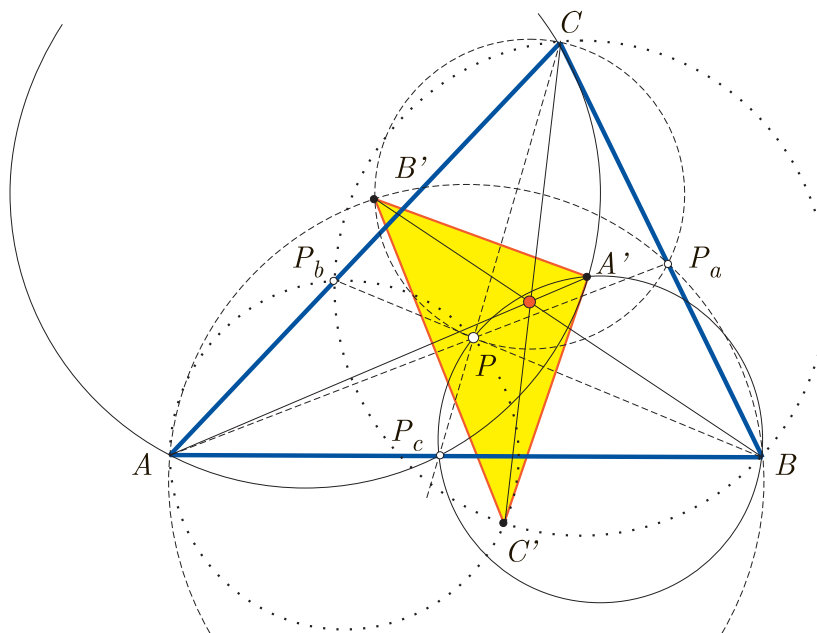
El centro de semejanza es

$$A' \left( \frac{u(b^2(u + v) + c^2(u + w)) - a^2(u + v)(u + w)}{(u + v)(u + w)(u + v + w)} : \frac{b^2}{u + w} : \frac{c^2}{u + v} \right).$$

Cálculos similares nos llevan a que los centros de las otras dos semejanzas son:

$$B' \left( \frac{a^2}{v + w} : \frac{v(c^2(v + w) + a^2(v + u)) - b^2(v + w)(v + u)}{(v + w)(v + u)(u + v + w)} : \frac{c^2}{v + u} \right).$$

$$C' \left( \frac{a^2}{w + v} : \frac{b^2}{w + u} : \frac{w(a^2(w + u) + b^2(w + v)) - c^2(w + u)(w + v)}{(w + u)(w + v)(u + v + w)} \right).$$



Entonces (ver pág. 10) los triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{A'B'C'}$  son perspectivas y su centro de perspectiva, que llamamos centro de  $P$ -semejanzas, es

$$\left( \frac{a^2}{v+w} : \frac{b^2}{w+u} : \frac{c^2}{u+v} \right).$$

Si las semejanzas se definen cambiando el sentido de uno de los dos vectores que las determinan, el triángulo con vértices en sus centros de semejanza es siempre el mismo, aunque con los vértices intercambiados.

Cuando  $P$  es el incentro, el centro de  $I$ -semejanzas es  $X_{58}$  de ETC,

$$\left( \frac{a^2}{b+c} : \frac{b^2}{c+a} : \frac{c^2}{a+b} \right),$$

y el incentro de  $\widehat{A'B'C'}$  es el primer punto de Stevanovic <sup>(1)</sup> ( $X_{1130}$  de ETC),

$$\left( a^2(bc + \sqrt{b(a-b+c)}\sqrt{c(a+b-c)}) : \dots : \dots \right).$$

Para el circuncentro, el centro de  $O$ -semejanzas es el punto de Kosnita <sup>(2)</sup> ( $X_{54}$  de ETC),

$$\left( \frac{a^2}{S^2 + S_B S_C} : \frac{b^2}{S^2 + S_C S_A} : \frac{c^2}{S^2 + S_A S_B} \right).$$

El centro de  $H$ -semejanzas es el propio ortocentro.

## 19 Ecuación de la circunferencia. Centro y radio

**19.1** El vector posición de un punto  $P(x, y, z)$ , respecto a un origen  $P_0$ , se expresa, según (3.10), por  $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$  ( $x + y + z = 1$ ), con lo que

$$\begin{aligned} \vec{p}^2 &= x^2 \vec{a}^2 + y^2 \vec{b}^2 + z^2 \vec{c}^2 + 2yz \vec{b} \cdot \vec{c} + 2zx \vec{c} \cdot \vec{a} + 2xy \vec{a} \cdot \vec{b} = \\ &= x^2 \vec{a}^2 + y^2 \vec{b}^2 + z^2 \vec{c}^2 + yz(\vec{b}^2 + \vec{c}^2 - a^2) + zx(\vec{c}^2 + \vec{a}^2 - b^2) + xy(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - c^2) = \\ &= (x + y + z) \left( x \vec{a}^2 + y \vec{b}^2 + z \vec{c}^2 \right) - a^2 yz - b^2 zx - c^2 xy. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$P_0 P^2 = x P_0 A^2 + y P_0 B^2 + z P_0 C^2 - a^2 yz - b^2 zx - c^2 xy. \quad (19.68)$$

Si, en particular, tomamos  $P_0 = O$ , el circuncentro de  $\widehat{ABC}$ , y  $P(x, y, z)$  en la circunferencia circunscrita  $O(R)$  de radio  $R$ , resulta que  $OP = OA = OB = OC = R$ ; con lo que entonces, de (19.68) y como hemos supuesto que  $x + y + z = 1$ , surge que la ecuación de la circunferencia circunscrita es

$$\boxed{a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy = 0.} \quad (19.69)$$

<sup>(1)</sup> Let  $I_a$  el centro de la circunferencia exinscrita relativa al vértice  $A$  del triángulo  $\widehat{ABC}$ ; sea  $A'$  el incentro de  $\widehat{I_a BC}$ , y se definen  $B'$  y  $C'$  cíclicamente. Sea  $A'' = BC' \cap CB'$ , y se definen  $B''$  y  $C''$  cíclicamente. Las rectas  $AA''$ ,  $BB''$  y  $CC''$  son concurrentes en el punto que en ETC se denomina de Stevanovic.

<sup>(2)</sup> Las rectas que unen los vértices  $A, B$  y  $C$  de un triángulo dado  $\widehat{ABC}$  con los circuncentros de los triángulos  $\widehat{BCO}$ ,  $\widehat{CAO}$  y  $\widehat{ABO}$  (donde  $O$  es el circuncentro de  $\widehat{ABC}$ ), respectivamente, concurren en un punto (pág. 74), conocido como el punto de Kosnita.

**19.2** Utilizando (19.68) para un punto dado en coordenadas baricéntricas homogéneas  $P(x : y : z)$ , poniendo  $(x', y', z') = \left( \frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+x} \right)$ , se tiene que:

$$P_0P^2 - \rho^2 = x' P_0A^2 + y' P_0B^2 + z' P_0C^2 - a^2y'z' - b^2z'x' - c^2x'y' - \rho^2 = \\ = x'(P_0A^2 - \rho^2) + y'(P_0B^2 - \rho^2) + z'(P_0C^2 - \rho^2) - a^2y'z' - b^2z'x' - c^2x'y'.$$

Llamando  $p = P_0A^2 - \rho^2, q = P_0B^2 - \rho^2$  y  $r = P_0C^2 - \rho^2$  (¡aquí  $r$  no denota el radio de la circunferencia inscrita!), se puede escribir

$$P_0P^2 - \rho^2 = px' + qy' + rz' - a^2y'z' - b^2z'x' - c^2x'y'$$

$$P_0P^2 - \rho^2 = \frac{1}{(x+y+z)^2} ((x+y+z)(px+qy+rz) - a^2yz - b^2zx - c^2xy). \tag{19.70}$$

Si  $P(x : y : z)$  está sobre la circunferencia  $P_0(\rho)$ , de centro  $P_0$  y radio  $\rho$ , se satisface:

$$\boxed{a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x+y+z)(px+qy+rz) = 0.} \tag{19.71}$$

que es la ecuación de una circunferencia general.

Los coeficientes  $p, q$  y  $r$  son las potencias de los vértices  $A, B$  y  $C$ , respecto de la circunferencia  $P_0(\rho)$  y la potencia de un punto cualquiera  $P(x : y : z)$ , respecto a  $P_0(\rho)$ , está dada por la fórmula (19.70).

Los puntos  $P$  del eje radical de las circunferencias  $P_0(\rho)$  y  $O(R)$ , son los que tienen igual potencia respecto a ambas; es decir,

$$P_0P^2 - \rho^2 = OP^2 - R^2.$$

Con lo que

$$(x+y+z)(px+qy+rz) - a^2yz - b^2zx - c^2xy = -a^2yz - b^2zx - c^2xy.$$

Así, el eje radical de una circunferencia general y la circunferencia circunscrita tiene por ecuación:

$$px + qy + rz = 0.$$

**19.3** Otras formas de obtener la ecuación de la circunferencia circunscrita:

A) Ecuación de la circunferencia general obtenida por una homotecia:

Cualquier par de circunferencias son homotéticas; realmente, existen dos homotecias que convierten una en otra, cuyos centros son los puntos de corte de pares de tangentes comunes (ellos están en la recta que pasa por los centros de las circunferencias). Tomemos una circunferencia  $\Gamma$ , la circunferencia circunscrita  $O(R)$  al triángulo de referencia y  $P$  uno de sus dos centros (interior o exterior) de homotecia. Si  $k$  es la razón de homotecia,  $X$  un punto sobre  $\Gamma$  y  $X'$  su homotético en  $O(R)$ , se verifica que  $PX' : PX = k$ ; por lo que, las ecuaciones de la homotecia con centro  $P(u : v : w)$  y que transforma  $X(x : y : z)$  en  $X'(x' : y' : z')$ , están dadas por (5.17):

$$x' = kx(u+v+w) + (1-k)u(x+y+z)$$

$$y' = ky(u+v+w) + (1-k)v(x+y+z)$$

$$z' = kz(u+v+w) + (1-k)w(x+y+z).$$

Dividiendo por  $k$  y poniendo  $t = (1 - k)/k$ , tenemos estas nuevas expresiones para las coordenadas del punto  $X'$ :

$$x' = x(u + v + w) + tu(x + y + z)$$

$$y' = y(u + v + w) + tv(x + y + z)$$

$$z' = z(u + v + w) + tw(x + y + z).$$

Como  $X'$  está sobre la circunferencia  $O(R)$  y denotando  $\mathfrak{S}$  la suma cíclica en las variables  $a, b, c, x, y, z, u, v, w$ , se tiene:

$$a^2 y' z' + b^2 z' x' + c^2 x' y' = 0,$$

$$\mathfrak{S} a^2 (y(u + v + w) + tv(x + y + z))(z(u + v + w) + tw(x + y + z)) = 0,$$

$$\mathfrak{S} a^2 (yz(u + v + w) + t(vz + wy)(x + y + z) + t^2 vw(x + y + z)^2) = 0,$$

$$(a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy)(u + v + w) +$$

$$\left[ t(\mathfrak{S} a^2 (vz + wy))(u + v + w) + t^2((a^2 vw + b^2 wu + c^2 uv)(x + y + z)) \right] (x + y + z) = 0.$$

Dividiendo por  $u + v + w$  y observando que lo que está entre corchetes es lineal en  $x, y, z$ , podemos poner como ecuación de la circunferencia general  $\Gamma$ ,

$$a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy - (x + y + z)(px + qy + rz) = 0.$$

— . —

B) Circunferencia circunscrita como conjugada isogonal de la recta del infinito.

El lugar geométrico de los puntos conjugados isogonales de la recta

$$px + qy + rz = 0 \quad \text{es} \quad pa^2 yz + qb^2 zx + rc^2 xy = 0,$$

cuyo primer miembro es un polinomio homogéneo de segundo grado en las variables  $x, y, z$ , que se anula para las coordenadas de los vértices  $A, B$  y  $C$  (es una cónica circunscrita a  $\widehat{ABC}$ ). En particular, el lugar geométrico de los puntos conjugados isogonales de la recta del infinito

$$x + y + z = 0 \quad \text{es} \quad a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy = 0,$$

que es la ecuación (19.69) de la circunferencia circunscrita a  $\widehat{ABC}$ .

Como aplicación de este hecho, se tiene que la cónica circunscrita es una elipse, parábola o hipérbola, según que su recta conjugada isogonal no corte a la circunferencia circunscrita, sea tangente o la corte en dos puntos; en este último caso, los conjugados isogonales de los puntos comunes de recta y circunferencia, son los puntos del infinito de la hipérbola, o sea, dan las direcciones de las asíntotas.

— . —

C) Circunferencia circunscrita como cónica circunscrita que pasa por los puntos cíclicos.

En el plano euclídeo, respecto a un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares homogéneas, a los puntos de coordenadas  $(1, i, 0)$  y  $(1, -i, 0)$  (la tercera de las variables es la homogénea) se les denomina puntos cíclicos (o puntos circulares). Llamados así porque, de todas las curvas de segundo grado (cónicas), sólo las circunferencias pasan por ellos <sup>(1)</sup>. Las rectas que pasan

<sup>(1)</sup> En efecto, sea una cónica cualquiera en coordenadas cartesianas homogéneas:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + c_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z = 0,$$

por uno de los puntos cíclicos se llaman isótropas, y son de la forma  $x \pm iy + c = 0$ . En ambos casos, la pendiente es un número igual al opuesto de su inverso, luego son perpendiculares a sí mismas.

Vamos a utilizar este hecho, para obtener la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de referencia, a partir de la ecuación de una cónica circunscrita

$$lyz + mzx + nxy = 0,$$

imponiéndole que pase por los puntos cíclicos del plano. Para ello, primero, necesitamos obtener las coordenadas baricéntricas de éstos, que resultan de resolver el sistema de ecuaciones

$$px + qy + rz = 0, \quad S_A(q - r)^2 + S_B(r - p)^2 + S_C(p - q)^2 = 0, \quad x + y + z = 0,$$

que permiten hallar el punto del infinito de una recta perpendicular a sí misma, usando (12.42). Se obtienen los pares de puntos cíclicos (expresados en tres formas distintas) siguientes:

$$(-a^2 : S_C \pm iS : S_B \mp iS), \quad (S_C \pm iS : -b^2 : S_A \mp iS) \quad (S_B \pm iS : S_A \mp iS : -c^2). \quad (19.72)$$

Sustituyendo en la ecuación de la cónica circunscrita  $lyz + mzx + nxy = 0$ , resultan las ecuaciones:

$$\begin{aligned} c^2(S_A - iS)l + c^2(iS + S_B)m - (S_A - iS)(iS + S_B)n &= 0 \\ c^2(iS + S_A)l + c^2(S_B - iS)m - (iS + S_A)(S_B - iS)n &= 0. \end{aligned}$$

Resueltas en las variables  $l, m$  y  $n$ , y usando (2.3) y (2.4), dan:

$$l = S^2 + S_B^2 = c^2a^2, \quad m = S^2 + S_A^2 = b^2c^2, \quad n = c^2(S_A + S_B) = c^4.$$

Obteniéndose, entonces, como ecuación de la circunferencia circunscrita:

$$a^2yz + b^2zy + c^2xy = 0.$$

— . —

D) Circunferencia circunscrita como como inversa de una recta.

Sea  $P_0(\rho)$  una circunferencia de radio arbitrario  $\rho$  y centro en un punto  $P_0(x : y : z)$  sobre la circunferencia circunscrita al triángulo de referencia. La inversa de ésta respecto a  $P_0(\rho)$  es una recta  $\ell$ , que contiene a los inversos  $A', B'$  y  $C'$  de  $A, B$  y  $C$ . Si designamos por  $d, x', y', z'$  las distancias de  $P_0$  a  $\ell$  y a los lados  $BC, CA$  y  $AC$ , respectivamente, es decir,  $(x', y', z')$  son las coordenadas trilineales (exactas) de  $P_0$ , se tienen que (ver pág. 52):

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{d}{x'}, \quad \frac{C'A'}{CA} = \frac{d}{y'}, \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{d}{z'}, \quad \text{o sea} \quad \frac{B'C'}{d} = \frac{a}{x'}, \quad \frac{C'A'}{d} = \frac{b}{y'}, \quad \frac{A'B'}{d} = \frac{c}{z'}.$$

Así, de la identidad  $A'B' + B'C' + C'A' = 0$ , se tiene, dividiéndola por  $d$ , que

$$\frac{a}{x'} + \frac{b}{y'} + \frac{c}{z'} = 0,$$

e imponiendo que pasa por uno de los puntos cíclicos, resulta que  $a_{11} = a_{22}$  y  $a_{12} = 0$ . Con lo que  $a_{11} \neq 0$  y  $a_{22} \neq 0$  (pues si no, la cónica degeneraría en un recta propia) y, dividiendo por  $a_{11}$ , la ecuación de la cónica queda de esta forma (en coordenadas cartesianas ordinarias):

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + d = 0,$$

que es una circunferencia.

que es la ecuación de la circunferencia circunscrita en coordenadas trilineales. Y como por (pag. 21),  $(x : y : z) = (ax' : by' : cz')$ , se sigue que la ecuación de la circunferencia circunscrita en coordenadas baricéntricas es

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} = 0, \quad \text{ó} \quad a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0.$$

**19.4** De las fórmulas (11.40), que dan la distancia entre un punto y los vértices del triángulo de referencia, y de que  $p = P_0A^2 - \rho^2$ ,  $q = P_0B^2 - \rho^2$  y  $r = P_0C^2 - \rho^2$ , se deduce que las ecuaciones de la circunferencia de centro  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  y radio  $\rho$  es

$$\begin{aligned} & a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z) \left( \left( \frac{c^2y_0^2 + 2S_Ay_0z_0 + b^2z_0^2}{(x_0 + y_0 + z_0)^2} - \rho^2 \right) x + \right. \\ & \left. + \left( \frac{a^2z_0^2 + 2S_Bz_0x_0 + c^2x_0^2}{(x_0 + y_0 + z_0)^2} - \rho^2 \right) y + \left( \frac{b^2x_0^2 + 2S_Cx_0y_0 + a^2y_0^2}{(x_0 + y_0 + z_0)^2} - \rho^2 \right) z \right) = 0. \end{aligned} \quad (19.73)$$

Con esto, se puede expresar la ecuación de una circunferencia, de la que se conoce su centro y radio, en la forma general dada por (19.71). Ahora, vamos a encontrar el centro y el radio de una circunferencia general dada por su ecuación (19.71):

Como el centro de una cónica es su centro de simetría, cualquier recta que pasa por él, corta a la cónica en dos puntos que lo separan armónicamente del punto del infinito de dicha recta. Por tanto, el centro de una cónica es el polo de la la recta del infinito. Aplicando esto a la circunferencia de ecuación (19.71), su centro  $(x_0 : y_0 : z_0)$ , debe satisfacer al sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 2p & p + q - c^2 & r + p - b^2 \\ p + q - c^2 & 2q & q + r - a^2 \\ r + p - b^2 & q + r - a^2 & 2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (19.74)$$

donde, la primera matriz es la asociada a la ecuación de la circunferencia y las matrices columna están formadas por las coordenadas  $(x_0 : y_0 : z_0)$  del centro y por los coeficientes de la rectas del infinito  $x + y + z = 0$ . Resolviendo, se obtiene como coordenadas del centro:

$$\begin{aligned} x_0 &= a^2S_A + S_B(r - p) - S_C(p - q) \\ y_0 &= b^2S_B + S_C(p - q) - S_A(q - r) \\ z_0 &= c^2S_C + S_A(q - r) - S_B(r - p) \end{aligned} \quad (19.75)$$

O bien,

$$\begin{aligned} x_0 &= -a^2p + S_Cq + S_Br + a^2S_A \\ y_0 &= S_Cp - b^2q + S_Ar + b^2S_B \\ z_0 &= S_Bp + S_Aq - c^2r + c^2S_C \end{aligned} \quad (19.76)$$

El radio de la circunferencia se puede obtener comparando las ecuaciones dadas por (19.71) y (19.73) y usando las coordenadas del centro dadas por (19.75) ó (19.76), obteniéndose las tres expresiones siguientes:

$$\rho^2 = \frac{c^2y_0^2 + 2S_Ay_0z_0 + b^2z_0^2}{(x_0 + y_0 + z_0)^2} - p = \frac{a^2z_0^2 + 2S_Bz_0x_0 + c^2x_0^2}{(x_0 + y_0 + z_0)^2} - q = \frac{b^2x_0^2 + 2S_Cx_0y_0 + a^2y_0^2}{(x_0 + y_0 + z_0)^2} - r.$$

Con lo que sustituyendo los valores de  $x_0, y_0$  y  $z_0$ , en cualquiera de estas tres expresiones, y agrupando adecuadamente, se puede llegar a (ver [20], pág. 89 y [18], pág. 82):

$$\rho^2 = \frac{1}{4S^2} \left( a^2b^2c^2 - 2(a^2S_{Ap} + b^2S_{Bq} + c^2S_{Cr}) + S_A(q-r)^2 + S_B(r-p)^2 + S_C(p-q)^2 \right).$$

$$\begin{aligned} \rho^2 = \frac{1}{4S^2} & \left( S_A(q-r)^2 + S_B(r-p)^2 + S_C(p-q)^2 - 2S^2(p+q+r) + \right. \\ & \left. + 2(S_B S_C p + S_C S_A q + S_A S_B r) + S^2(S_A + S_B + S_C) - S_A S_B S_C \right). \end{aligned}$$

O bien, evaluando  $S_A$ ,  $S_B$  y  $S_C$ :

$$\begin{aligned} \rho^2 = & \left( a^2b^2c^2 + a^4p + b^4q + c^4r + a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2 - a^2(b^2 + c^2)p - b^2(c^2 + a^2)q - c^2(a^2 + b^2)r \right. \\ & \left. - (b^2 + c^2 - a^2)qr - (c^2 + a^2 - b^2)rp - (a^2 + b^2 - c^2)pq \right) \\ & / (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c). \end{aligned}$$

En particular, se obtiene, de nuevo, las coordenadas del circuncentro (pág. 31), como centro (19.75) de la circunferencia circunscrita (19.69),  $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$ :  $O(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$ . Y su radio, poniendo  $S^2$  en función de  $a, b$  y  $c$ , es

$$R = \frac{abc}{2S} = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}. \quad (19.77)$$

**19.5** Como ejemplo de las ecuaciones dadas, relativas a circunferencias, vamos a dar una justificación analítica del método de construcción de simedias dado en la página 53). Ver figura en la página 52.

Sea  $\triangle ABC$  un triángulo, no rectángulo en  $B$ , la circunferencia  $A(c)$  de centro en  $A$  y que pasa por  $B$  (de radio  $c$ ) tiene por ecuación, usando (19.73), la siguiente

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy - (x+y+z)(-c^2x + (b^2 - c^2)z) = 0.$$

El punto  $B'$  de intersección (distinto de  $B$ ) del lado  $BC$  con esta circunferencia es  $B'(0 : b^2 - c^2 : a^2 - b^2 + c^2)$ . La ecuación de la circunferencia  $ABB'$  la podemos obtener a partir de la ecuación (19.71), calculando los coeficientes  $p, q$  y  $r$ , imponiendo que pasa por estos tres puntos; se obtiene:

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (b^2 - c^2)(x+y+z)z = 0.$$

Ahora, el punto  $C'$  de intersección de esta circunferencia con el lado  $AC$  ( $y = 0$ ) es  $C'(b^2 - c^2 : 0 : c^2)$ . Finalmente, el punto medio  $M$  de  $BC'$  es

$$(b^2 - c^2 : 0 : c^2) + b^2(0 : 1 : 0) = (b^2 - c^2 : b^2 : c^2).$$

Así, la ecuación de la recta  $AM$  es  $-c^2y + b^2z = 0$ , que es la de la simediana por  $A$ , dada en (13.57).

## 20 Ecuaciones de circunferencias particulares

En esta sección vamos a obtener las ecuaciones de ciertas circunferencias notables asociadas a un triángulo  $\triangle ABC$ .



### 20.1 Circunferencia de los nueve puntos

La ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados (5.11)  $M_a(0 : 1 : 1)$ ,  $M_b(1 : 0 : 1)$ ,  $M_c(1 : 1 : 0)$ , se puede determinar resolviendo el sistema que se obtiene al sustituir en la ecuación de una circunferencia general (19.71) estas coordenadas:

$$2(q + r) = a^2, \quad 2(r + p) = b^2, \quad 2(p + q) = c^2.$$

De donde se tiene que

$$p = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{4} = \frac{S_A}{2}, \quad q = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{4} = \frac{S_B}{2}, \quad r = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4} = \frac{S_C}{2}.$$

Con lo que tal circunferencia tiene por ecuación:

$$\boxed{a^2yz + b^2zx + c^2xy - \frac{1}{2}(x + y + z)(S_Ax + S_By + S_Cz) = 0}, \quad (20.78)$$

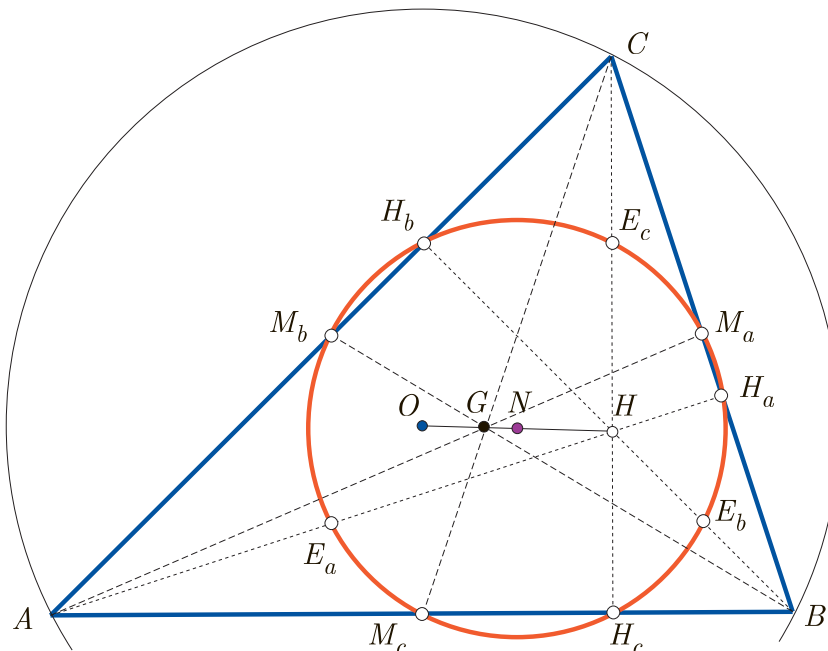
conocida como circunferencia de Euler <sup>(1)</sup> o circunferencia de los nueve puntos, que además de pasar por los puntos medios de los lados, pasa por los pies de las alturas (12.49)

$$H_a(0 : S_C : S_B), \quad H_b(S_C : 0 : S_A), \quad H_c(S_B : S_A : 0),$$

y por los puntos medios de cada vértice y el ortocentro,  $H(S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B)$ , que se obtienen mediante la fórmula (5.12), poniendo  $m = n = 1$ ,

$$E_a = S^2(1 : 0 : 0) + (S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B) = (S^2 + S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B),$$

$$E_b(S_B S_C : S^2 + S_C S_A : S_A S_B), \quad E_c(S_B S_C : S_C S_A : S^2 + S_A S_B).$$



Para obtener el centro y radio de la circunferencia de Euler, como método general, se puede acudir a las fórmulas (19.76) que dan el centro y luego, a partir de la ecuación de una circunferencia (19.73), cuando se conoce el centro y el radio, determinar éste. No obstante, este camino suele ser bastante arduo y geoméricamente poco elegante, en el caso que nos ocupa es más sencillo

<sup>(1)</sup> Leonhard Paul Euler (1707–1783)

proceder de la forma siguiente: Como la circunferencia de Euler pasa por los punto medios de los lados  $M_a, M_b$  y  $M_c$  y

$$\frac{AG}{GM_a} = \frac{BG}{GM_b} = \frac{CG}{GM_c} = \frac{2}{1},$$

se tiene que es la homotética de la circunferencia circunscrita, mediante la homotecia de centro en el baricentro  $G$  y razón  $-1/2$ . Así, su radio es  $R/2$  y su centro  $N$  verifica  $ON : NG = -3 : 1$ , por lo que, usando (5.12), (2.4) y las coordenadas de  $G(1 : 1 : 1)$  y  $O(a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C)$ , que suman  $3$  y  $2S^2$ , se tiene que  $N = 3O - 3(2S^2)G = (a^2 S_A - 2S^2 : b^2 S_B - 2S^2 : c^2 S_C - 2S^2)$ , o sea, que el centro de la circunferencia de los nueve puntos ( $X_5$  en ETC) es:

$$N(S^2 + S_B S_C : S^2 + S_C S_A : S^2 + S_A S_B).$$

Que también se puede expresar, en función de los ángulos, así:

$$(1 + \cotag B \cotag C : 1 + \cotag C \cotag A : 1 + \cotag A \cotag B)$$

$$\left( \frac{\cos(B - C)}{\sen B \sen C} : \frac{\cos(C - A)}{\sen C \sen A} : \frac{\cos(A - B)}{\sen A \sen B} \right)$$

$$N(a \cos(B - C) : b \cos(C - A) : c \cos(A - B)).$$

Siguiendo el método general para obtener el centro, se obtiene por las fórmulas (19.76)

$$x_0 = -a^2 \frac{S_A}{2} + S_C \frac{S_B}{2} + S_B \frac{S_C}{2} + a^2 S_A = \frac{1}{2}(S^2 + S_B S_C)$$

$$y_0 = S_C \frac{S_A}{2} - b^2 \frac{S_B}{2} + S_A \frac{S_C}{2} + b^2 S_B = \frac{1}{2}(S^2 + S_C S_A)$$

$$z_0 = S_B \frac{S_A}{2} + S_A \frac{S_B}{2} - c^2 \frac{S_C}{2} + c^2 S_C = \frac{1}{2}(S^2 + S_A S_B).$$

Su radio surge, de comparar su ecuación (20.78) con la ecuación (19.73) de una circunferencia en función de su centro y su radio:

$$\frac{c^2 y_0^2 + 2S_A y_0 z_0 + b^2 z_0^2}{(x_0 + y_0 + z_0)^2} - \rho = -\frac{S_A}{2},$$

donde  $(x_0 : y_0 : z_0) = (S^2 + S_B S_C : S^2 + S_C S_A : S^2 + S_A S_B)$  y  $x_0 + y_0 + z_0 = 4S^2 = S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A$ . Sustituyendo y simplificando da:

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{4(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} = \frac{R^2}{4}.$$

— . —

## 20.2 Circunferencia inscrita

La circunferencia inscrita es tangente interiormente a los lados de  $\widehat{ABC}$  y sus puntos de contacto son los pedales (12.50) de su centro, el incentro  $I(a : b : c)$ :

$$A_I(0 : s - c : s - b), \quad B_I(s - c : 0 : s - a), \quad C_I(s - b : s - a : 0).$$

Por tanto, para obtener su ecuación debemos resolver, en las variables  $p, q$  y  $r$ , las ecuaciones siguientes, que resultan de sustituir estos puntos en la ecuación de la circunferencia general (19.71):

$$\begin{aligned}(s-c)q + (s-b)r &= a(s-c)(s-b), \\ (s-c)p + (s-a)r &= b(s-a)(s-c), \\ (s-b)p + (s-a)q &= c(s-b)(s-a).\end{aligned}$$

Y se tiene que la ecuación de la circunferencia inscrita es

$$\boxed{a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x+y+z)((s-a)^2x + (s-b)^2y + (s-c)^2z) = 0.} \quad (20.79)$$

Comparando esta ecuación con la ecuación (19.73) de una circunferencia de la que se conoce su centro y radio, podemos determinar el radio  $r$  de la circunferencia inscrita:

$$\begin{aligned}\frac{c^2b^2 + 2S_Abc + b^2c^2}{(a+b+c)^2} - r^2 &= (s-a)^2, & 2bc(bc + S_A) - 4s^2(s-a)^2 &= 4s^2r^2, \\ 4bcs(s-a) - 4s^2(s-a)^2 &= 4s^2r^2, & (s-a)(bc - (s-a)s) &= sr^2, \\ (s-a)(bc - (s-(2s-b-c))s) &= sr^2, & (s-a)(s-b)(s-c) &= sr^2, \\ r &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \frac{S}{2s}.\end{aligned}$$

Fórmula ya expuesta en (2.5).

— . —

### 20.3 Circunferencias exinscritas

Los centros de las circunferencias exinscritas  $I_a(r_a)$ ,  $I_b(r_b)$  y  $I_c(r_c)$ , relativas a los vértices  $A, B$  y  $C$ , respectivamente, están dados por (12.51):

$$I_a(-a : b : c), \quad I_b(a : -b : c), \quad I_c(a : b : -c).$$

Y los pedales de éstos (12.52) son

$$\begin{aligned}A_{I_a}(0 : s-b, s-c), & \quad B_{I_a}(s-b : 0 : -s), & \quad C_{I_a}(s-c : -s : 0), \\ A_{I_b}(0 : s-a : -s), & \quad B_{I_b}(s-a : 0 : s-c), & \quad C_{I_b}(-s : s-c : 0), \\ A_{I_c}(0 : -s : s-a), & \quad B_{I_c}(-s : 0 : s-b), & \quad C_{I_c}(s-a : s-b : 0).\end{aligned}$$

Se obtienen las ecuaciones de las circunferencias exinscritas, procediendo como en el caso de la circunferencia inscrita, y son:

$$\boxed{\begin{aligned}I_a(r_a) : a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x+y+z)(s^2x + (s-c)^2y + (s-b)^2z) &= 0, \\ I_b(r_b) : a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x+y+z)((s-c)^2x + s^2y + (s-a)^2z) &= 0, \\ I_c(r_c) : a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x+y+z)((s-b)^2x + (s-a)^2y + s^2z) &= 0.\end{aligned}} \quad (20.80)$$

Así mismo, se obtienen las expresiones para sus radios:

$$r_a = \frac{S}{b+c-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}, \quad r_b = \frac{S}{a-b+c}, \quad r_c = \frac{S}{a+b-c}.$$

— . —

### 20.4 Circunferencia radical de las exinscritas

Si un punto  $(x : y : z)$  tiene la misma potencia respecto a las tres circunferencias exinscritas, debe satisfacer al sistema de ecuaciones:

$$s^2x + (s - c)^2y + (s - b)^2z = (s - c)^2x + s^2y + (s - a)^2z = (s - b)^2x + (s - a)^2y + s^2z = 0.$$

Restando el segundo miembro de estas igualdades al primero y el tercero al segundo, resultan las ecuaciones:

$$(a + b)x - (a + b)y + (a - b)z = 0, \quad (b - c)x + (b + c)y - (b + c)z = 0,$$

cuya solución son las coordenadas del punto de Spieker  $S_p(b + c : c + a : a + b)$  (pág. 104).

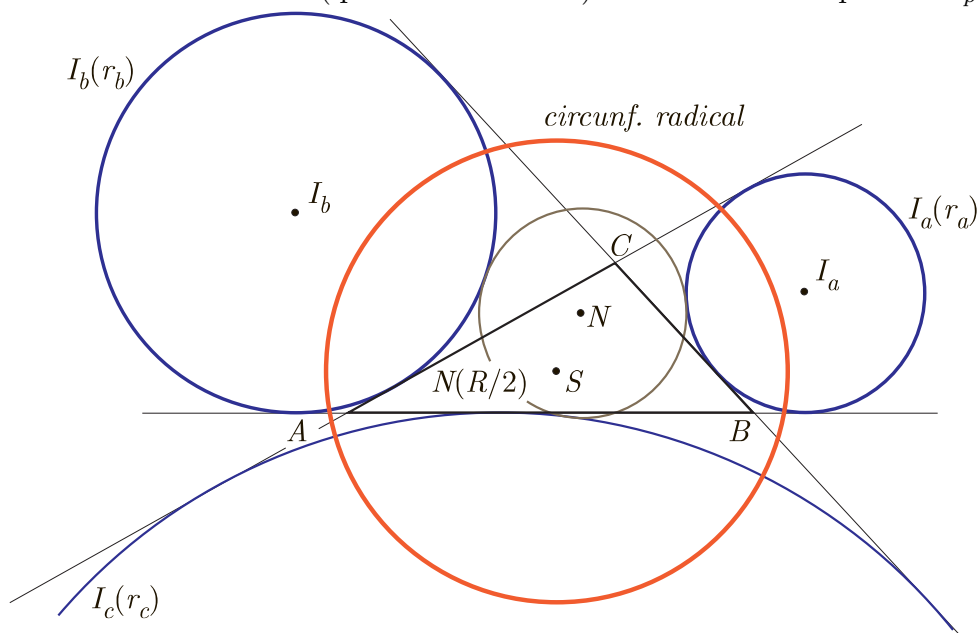
La potencia del punto de Spieker, respecto a la circunferencia exinscrita  $I_a(r_a)$  es, por la fórmula (19.70),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4(a + b + c)^2} \left( (a + b + c)(s^2(b + c) + (s - c)^2(c + a) + (s - b)^2(a + b)) - \right. \\ & \left. (a^2(c + a)(a + b) + b^2(a + b)(b + c) + c^2(b + c)(c + a)) \right) = \\ & = \frac{abc + a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)}{4(a + b + c)}. \end{aligned}$$

Este es el mismo valor que toma

$$\frac{r^2 + s^2}{4}.$$

La potencia de  $S_p$  respecto a las otras dos circunferencias exinscritas da este mismo resultado. Luego, la circunferencia  $S_p(\frac{1}{2}\sqrt{r^2 + s^2})$ , de centro en el punto de Spieker y radio  $\frac{1}{2}\sqrt{r^2 + s^2}$ , es ortogonal a las tres circunferencias exinscritas (circunferencia radical). Por tanto, estas tres circunferencias se transforman en sí mismas (quedan invariantes) en la inversión respecto a  $S_p(\frac{1}{2}\sqrt{r^2 + s^2})$ .



Para obtener la ecuación de la circunferencia radical de las exinscritas, calculamos las potencias de los vértices del triángulo de referencia respecto a ella (usando (11.40)),

$$p = S_p A^2 - \frac{r^2 + s^2}{4} = \frac{c^2(c + a)^2 + 2S_A(c + a)(a + b) + b^2(a + b)^2}{4(a + b + c)^2} - \frac{r^2 + s^2}{4} = -(s - b)(s - c)$$

Y de la misma forma, se obtienen

$$q = -(s - c)(s - a), \quad r = -(s - a)(s - b).$$

Con lo que la ecuación de la circunferencia radical de las exinscritas es:

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy + (s - a)(s - b)(s - c)(x + y + z) \left( \frac{x}{s - a} + \frac{y}{s - b} + \frac{z}{s - c} \right) = 0 \quad (20.81)$$

Esta ecuación también se puede poner de la forma:

$$(s - b)(s - c)x^2 + (s - c)(s - a)y^2 + (s - a)(s - b)z^2 + asyz + bszx + csxy = 0.$$

Nótese que el eje radical de esta circunferencia y la circunscrita es la tripolar del punto de Nagel,  $N_a(s - a : s - b : s - c)$ .

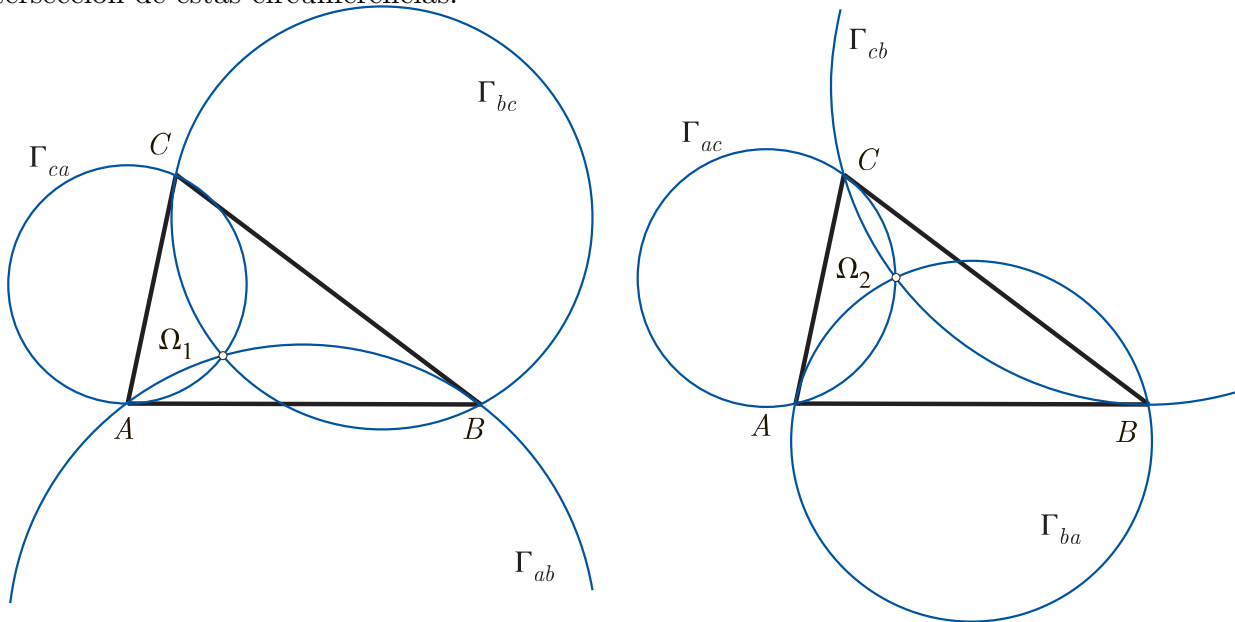
La circunferencia radical de las exinscritas pasa por los pies de las perpendiculares trazadas desde cada vértice de  $\widehat{ABC}$  sobre sus bisectrices exteriores

(ver <http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2314.pdf>)

— . —

### 20.5 Circunferencias adjuntas

Se conoce como circunferencias adjuntas las que pasan por dos de los vértices de un triángulo  $\widehat{ABC}$  y son tangentes a uno de los lados adyacentes. Vamos a obtener los puntos de Brocard como intersección de estas circunferencias.



Consideremos la circunferencia que pasa por los vértices  $A$  y  $B$  y es tangente al lado  $BC$  en  $B$ . La ecuación de una circunferencia general (19.71), por satisfacerse para  $A(1 : 0 : 0)$  y  $B(0 : 1 : 0)$  queda de la forma

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - rz(x + y + z) = 0.$$

Como además es tangente a  $x = 0$  en  $B(0 : 1 : 0)$ , debe tener un raíz doble nula, en  $z$ , la ecuación  $z(a^2y - r(y + z)) = 0$ . Por tanto,  $r = a^2$  y la ecuación de esta circunferencia adjunta es:

$$\Gamma_{ab} : a^2yz + b^2zx + c^2xy - a^2z(x + y + z) = 0.$$

Similarmente, obtenemos la ecuación de las circunferencias  $\Gamma_{bc}$  que pasa por  $B$  y  $C$  y es tangente a  $CA$  en  $C$ , y la de la circunferencia  $\Gamma_{ca}$  que pasa por  $C$  y  $A$  y es tangente a  $AB$  en  $A$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{bc} : \quad & a^2yz + b^2zx + c^2xy - b^2x(x + y + z) = 0. \\ \Gamma_{ca} : \quad & a^2yz + b^2zx + c^2xy - c^2y(x + y + z) = 0. \end{aligned}$$

Las tres circunferencias  $\Gamma_{ab}, \Gamma_{bc}$  y  $\Gamma_{ca}$  se cortan en el primer punto de Brocard (14.3), que se obtiene el sistema que resulta, por ejemplo, de restar a la primera ecuación la segunda y a la segunda la tercera:

$$\left. \begin{aligned} b^2x - a^2z &= 0 \\ -b^2x + c^2y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Omega_1 \left( \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2} \right).$$

Si ahora tomamos las circunferencias adjuntas  $\Gamma_{ac}, \Gamma_{ba}$  y  $\Gamma_{cb}$  (la primera, pasa por  $A$  y  $C$  y es tangente a  $CB$  en  $C$ ; similarmente las otras dos), sus ecuaciones son:

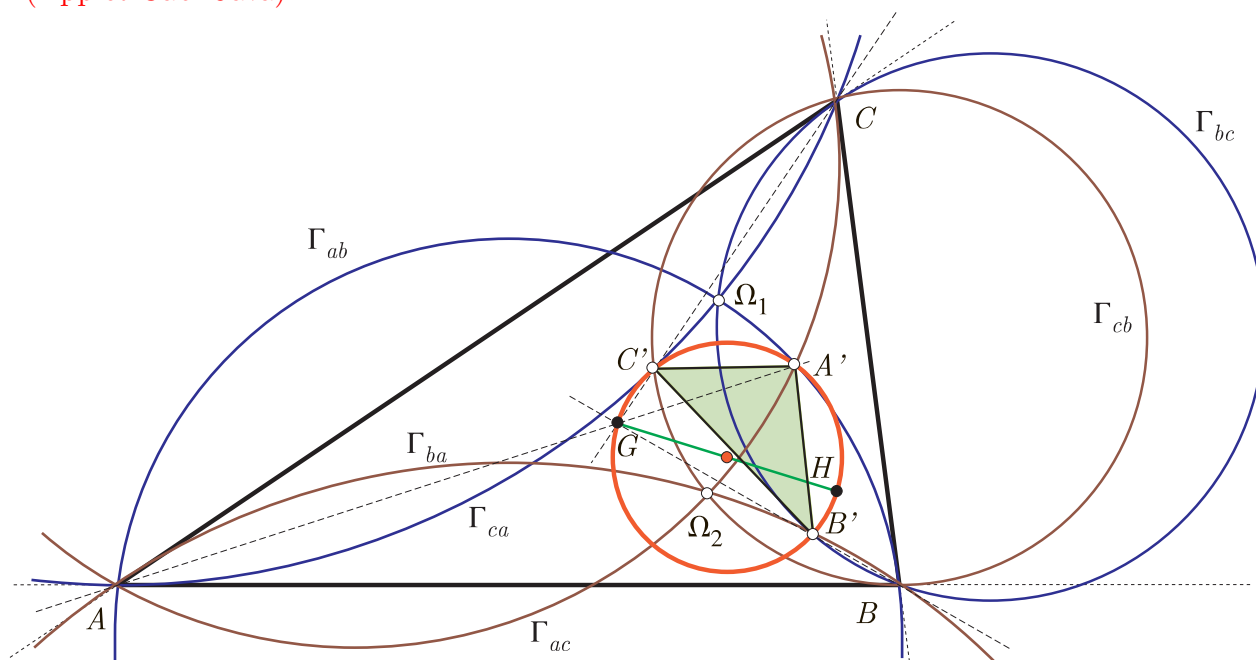
$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{ac} : \quad & a^2yz + b^2zx + c^2xy - a^2y(x + y + z) = 0 \\ \Gamma_{ba} : \quad & a^2yz + b^2zx + c^2xy - b^2z(x + y + z) = 0 \\ \Gamma_{cb} : \quad & a^2yz + b^2zx + c^2xy - c^2x(x + y + z) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Omega_2 \left( \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} \right).$$

### 20.6 Circunferencia ortobaricéntrica

Las circunferencias adjuntas, no tangentes en el vértice  $A$ , se cortan además en el punto  $A'(a^2 : 2S_A : 2S_B)$ . Similarmente, se definen, para los otros pares de circunferencias adjuntas, los puntos  $B'(2S_B : b^2 : 2S_B)$  y  $(2S_C : 2S_C : c^2)$ . El centro de perspectiva de  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  es el baricentro  $G$  de  $\triangle ABC$ . La circunferencia circunscrita a  $\triangle A'B'C'$  (circunferencia ortobaricéntrica), tiene como diámetro el segmento  $GH$ , de centro el punto  $(4S_B S_C + a^2 S_A : 4S_C S_A + b^2 S_B : 4S_A S_B + c^2 S_C)$  ( $X_{381}$  en ETC). Su ecuación es:

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - \frac{2}{3}(x + y + z)(S_A x + S_B y + S_C z) = 0$$

(Applet CabriJava)



## 20.7 Circunferencias de Schröder

Las circunferencias circunscritas a los triángulos  $\widehat{AIA}_I$ ,  $\widehat{BIB}_I$  y  $\widehat{CIC}_I$  (siendo  $A_I, B_I, C_I$  los puntos de contacto (pág. 34) de la circunferencia inscrita a  $\widehat{ABC}$ ), concurren en dos puntos (uno es el incentro  $I$ ).

Las ecuaciones de tales circunferencias son:

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy + (x + y + z) \left( \frac{ac(a - b + c)}{2(b - c)}y - \frac{ab(a + b - c)}{2(b - c)}z \right) = 0.$$

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy + (x + y + z) \left( -\frac{bc(-a + b + c)}{2(c - a)}x + \frac{ba(a + b - c)}{2(c - a)}z \right) = 0.$$

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy + (x + y + z) \left( \frac{cb(-a + b + c)}{2(a - b)}x - \frac{ca(a - b + c)}{2(a - b)}y \right) = 0.$$

Éstas se cortan en  $I(a : b : c)$  y en

$$(a((b - c)^2 + a(b + c - 2a)) : b((-a + c)^2 + b(a - 2b + c)) : c((a - b)^2 + (a + b - 2c)c)),$$

conocido como punto de Schröder ( $X_{1155}$  en ETC).

## 20.8 Circunferencia de Brocard

La circunferencia que pasa por el vértice (opuesto a la base) de cada triángulo isósceles levantado interiormente sobre cada lado del triángulo de referencia, con ángulo en la base el ángulo de Brocard (ver figura en la pág. 66), denominada circunferencia de Brocard, la podemos determinar sustituyendo dichos vértices

$$X(-a^2 : S_C - S_\omega : S_B - S_\omega), \quad Y(S_C - S_\omega : -b^2 : S_A - S_\omega), \quad Z(S_B - S_\omega : S_A - S_\omega : -c^2),$$

en la ecuación de la circunferencia general (19.71), obteniéndose, al sustituir  $X$ ,

$$a^2(S_B - S_\omega)(S_C - S_\omega) - a^2b^2(S_B - S_\omega) - a^2c^2(S_C - S_\omega) - 2S_\omega((-a^2p + r(S_B - S_\omega)) + q(S_C - S_\omega)) = 0,$$

y las ecuaciones correspondientes, cuando se sustituyen las coordenadas de  $Y$  y  $Z$ ; las tres se pueden poner de la forma:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a^2p + c^2q + b^2r) = -a^2(b^2 - bc + c^2)(b^2 + bc + c^2)$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(c^2p + b^2q + a^2r) = -b^2(a^2 - ac + c^2)(a^2 + ac + c^2)$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2p + a^2q + c^2r) = -c^2(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$$

$$p = -\frac{b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad q = -\frac{a^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad r = -\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Con lo que la ecuación de la circunferencia de Brocard se puede poner de la forma:

$$\boxed{a^2yz + b^2zx + c^2xy - \frac{a^2b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}(x + y + z) \left( \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2} \right) = 0} \quad (20.82)$$

Esta circunferencia contiene a los puntos de Brocard  $\Omega_1(1/b^2 : 1/c^2 : 1/a^2)$  y  $\Omega_2(1/c^2 : 1/a^2 : 1/b^2)$  y pasa por el circuncentro  $O(a^2S_a : b^2S_B : c^2S_C)$  y el simediano  $K(a^2 : b^2 : c^2)$ .

Su centro es el punto medio de  $OK$  (diámetro de Brocard),  $X_{182}$  en ETC:

$$(a^2(a^2(a^2 - b^2 - c^2) - 2b^2c^2) : b^2(b^2(b^2 - c^2 - a^2) - 2c^2a^2) : c^2(c^2(c^2 - a^2 - b^2) - 2a^2b^2)).$$

La circunferencia de Brocard es el lugar geométrico de los puntos comunes de las tres circunferencias que describimos a continuación:

Para todo número real  $t$  se consideran los tres puntos, en los lados del triángulo de referencia,

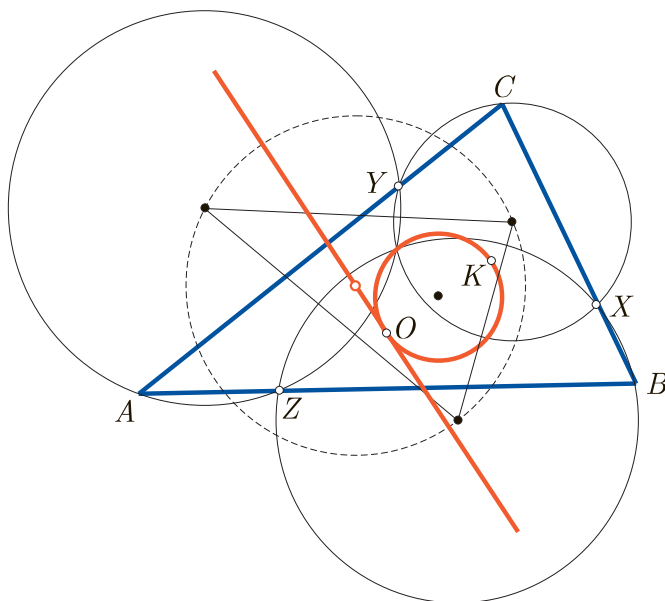
$$X(0 : 1 - t : t), \quad Y(t : 0 : 1 - t), \quad Z(1 - t : t : 0).$$

Las ecuaciones de las circunferencias  $AYZ, BZX$  y  $CXY$  son

$$\Gamma_a : a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)((c^2 - c^2t)y + b^2tz) = 0,$$

$$\Gamma_b : a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)(c^2tx + (a^2 - a^2t)z) = 0,$$

$$\Gamma_c : a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)((b^2 - b^2t)x + a^2ty) = 0.$$



Cuyo punto común <sup>(1)</sup> es

$$P(a^2(a^2t(t-1)+b^2t^2+c^2(t-1)^2) : b^2(b^2t(t-1)+c^2t^2+a^2(t-1)^2) : c^2(c^2t(t-1)+a^2t^2+b^2(t-1)^2)).$$

Eliminando  $t$ , se obtiene la siguiente ecuación:

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 - a^4yz - b^4xz - c^4xy = 0.$$

Comparando los coeficientes de esta ecuación con la ecuación de una circunferencia general  $a^2yz + b^2xz + c^2xy - (x + y + z)(px + qy + rz) = 0$ , se obtiene salvo el coeficiente de proporcionalidad  $-(a^2 + b^2 + c^2)$ ,

$$p = \frac{b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad q = \frac{c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad r = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Por lo que se trata de la circunferencia de Brocard.

El centro de la circunferencia  $\Gamma_a$  es

$$\left( (b^2 - c^2)(a^2 - b^2 - c^2)t - (a^2 - c^2)^2 + b^2(a^2 + c^2) : \right. \\ \left. b^2(-a^2 + b^2 + 3c^2)t - b^2(-a^2 + b^2 + c^2) : -c^2(-a^2 + 3b^2 + c^2)t + 2b^2c^2 \right).$$

<sup>(1)</sup> Para cualquiera que sean los tres puntos  $X, Y$  y  $Z$  sobre los lados (no necesariamente como se definen aquí), las circunferencias  $AYZ, BZX$  y  $CXY$  se cortan en un mismo punto: Teorema de Miquel



Los centros de  $\Gamma_b$  y  $\Gamma_c$  se obtienen rotando, hacia la derecha, las coordenadas del centro de  $\Gamma_a$ , a la vez que se permutan  $a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow a$ .

El centro de la circunferencia que pasa por los centros de las anteriores es

$$(a^2(a^2 + 2c^2(t-1) - 2b^2t) : b^2(b^2 + 2a^2(t-1) - 2c^2t) : c^2(c^2 + 2b^2(t-1) - 2a^2t)).$$

El lugar geométrico de estos centros, cuando  $t$  varía, es

$$(b^2c^2(a^2(2a^2 - b^2 - c^2) + (b^2 - c^2)^2)x + (c^2a^2(b^2(2b^2 - c^2 - a^2) + (c^2 - a^2)^2)y + (a^2b^2(c^2(2c^2 - a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)^2)z = 0,$$

que es la tangente a la circunferencia de Brocard en  $O$ . Su tripolo es el punto  $X_{2987}$  de ETC, de coordenadas

$$\left( \frac{a^2}{2a^4 - a^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2} : \frac{b^2}{2b^4 - b^2(c^2 + a^2) + (c^2 - a^2)^2} : \frac{c^2}{2c^4 - c^2(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)^2} \right).$$

Es punto es a su vez el conjugado isogonal del  $X_{230}$ , de coordenadas

$$(2a^4 - a^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2 : 2b^4 - b^2(c^2 + a^2) + (c^2 - a^2)^2 : 2c^4 - c^2(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)^2).$$

— . —

## 20.9 Circunferencia circunscrita al triángulo excentral

El triángulo excentral tiene sus vértices en los centros  $I_a(-a : b : c)$ ,  $I_b(a : -b : c)$  y  $I_c(a : b : -c)$  de las circunferencias exinscritas. Luego, sustituyendo las coordenadas de estos puntos en la ecuación de la circunferencia general (19.71), se llega a las tres ecuaciones

$$\begin{aligned} (a - b - c)(ap - bq - cr + abc) &= 0, \\ (-a + b + c)(-ap + bq - cr + abc) &= 0, \\ (-a - b + c)(-ap - bq + cr + abc) &= 0, \end{aligned}$$

de donde, se obtiene que la ecuación circunferencia circunscrita al triángulo excentral es

$$\boxed{a^2yz + b^2zx + c^2xy + (x + y + z)(bcx + cay + abz) = 0} \quad (20.83)$$

Para determinar su centro y radio, usaremos que ella es la homotética de la circunferencia circunscrita a  $\widehat{ABC}$ , mediante la homotecia de centro en el incentro  $(a : b : c)$  de éste y razón 2.

Por las ecuaciones (5.17) de la homotecia de centro en  $I(a : b : c)$  y razón 1/2 el homólogo de un punto  $(x : y : z)$  es

$$((a + b + c)x + a(x + y + z) : (a + b + c)y + b(x + y + z) : (a + b + c)z + c(x + y + z)).$$

Sustituyendo en la ecuación  $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$ , de la circunferencia circunscrita a  $\widehat{ABC}$ , resulta:

$$(a + b + c)^2(bcx^2 + acy^2 + abz^2 + a(a + b + c)yz + b(a + b + c)xz + c(a + b + c)xy) = 0,$$

que coincide con la ecuación (20.83).

**20.10** Circunferencia de Apolonio de  $\widehat{ABC}$

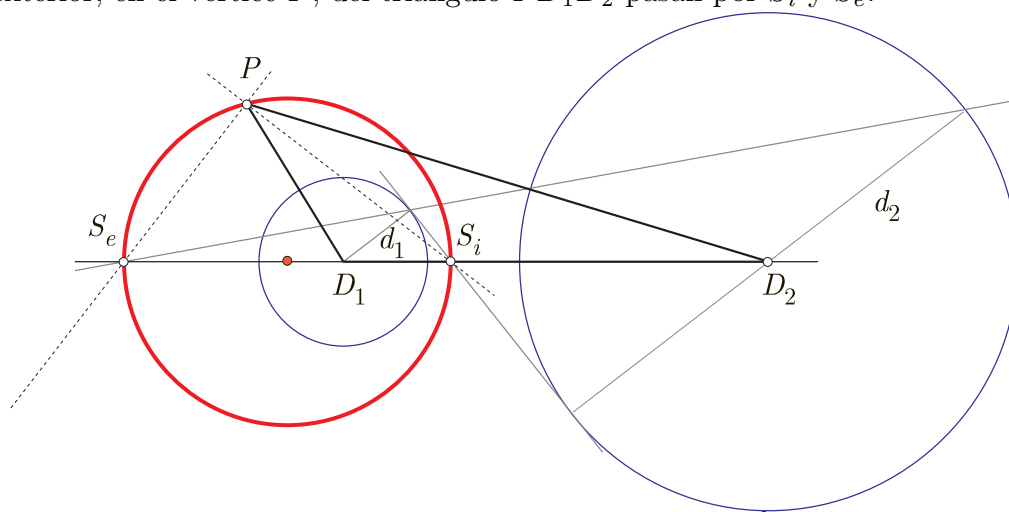
Circunferencia de Apolonio de  $\widehat{ABC}$ : tangente internamente a cada una de las circunferencias exinscritas (ver <http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2273.pdf>)

**20.11** A-circunferencia de Apolonio

Se denomina circunferencia de Apolonio de dos puntos  $D_1$  y  $D_2$  para la razón  $d_1/d_2$  al lugar geométrico de los puntos  $P$  para los cuales se verifica:

$$\frac{PD_1}{PD_2} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Esta circunferencia tiene como diámetro el segmento formado por los centros de semejanza interior  $S_i$  y exterior  $S_e$  de las circunferencias  $D_1(d_1)$  y  $D_2(d_2)$ , de centros en  $D_1$  y  $D_2$  y de radios  $d_1$  y  $d_2$ . Para cualquier punto en la circunferencia de Apolonio citada, se verifica que las bisectrices interior y exterior, en el vértice  $P$ , del triángulo  $\widehat{PD_1D_2}$  pasan por  $S_i$  y  $S_e$ .



Como situación particular, podemos tomar, dado un triángulo  $\widehat{ABC}$ , la circunferencia de Apolonio de los vértices  $B$  y  $C$  para la razón  $c/b$ ; es decir, el lugar geométrico de los puntos  $P$  que cumplen  $\frac{PB}{PC} = c/b$ . A esta circunferencia le denominamos A-circunferencia de Apolonio, relativa a  $\widehat{ABC}$ . Como un diámetro tiene sus extremos en  $(0 : b : c)$  y  $(0 : -b : c)$ , su ecuación y, respectivamente, las circunferencias de Apolonio relativas a los vértices  $B$  y  $C$ , son:

$$\Gamma_a : a^2yz + b^2xz + c^2xy - \frac{a^2}{b^2 - c^2}(x + y + z)(-c^2y + b^2z) = 0 \tag{20.84}$$

$$\Gamma_b : a^2yz + b^2xz + c^2xy - \frac{b^2}{c^2 - a^2}(x + y + z)(c^2x - a^2z) = 0 \tag{20.85}$$

$$\Gamma_c : a^2yz + b^2xz + c^2xy - \frac{c^2}{a^2 - b^2}(x + y + z)(-b^2x + a^2y) = 0 \tag{20.86}$$

Obsérvese que los ejes radicales (§19.2) de cada circunferencia de Apolonio y la circunferencia circunscrita son las simedianas (13.57).

Los radios de estas tres circunferencias son, respectivamente,

$$R_a = \left| \frac{abc}{b^2 - c^2} \right|, \quad R_b = \left| \frac{abc}{c^2 - a^2} \right|, \quad R_c = \left| \frac{abc}{a^2 - b^2} \right|.$$

Los ejes radicales de las circunferencias de Apolonio de  $\widehat{ABC}$ , tomadas dos a dos, coinciden en la recta de ecuación  $b^2c^2(b^2 - c^2)x + c^2a^2(c^2 - a^2)y + a^2b^2(a^2 - b^2)z = 0$ , por lo que las tres se cortan en dos puntos que son los puntos isodinámicos,  $X_{15}$  y  $X_{16}$  en ETC, de coordenadas:

$$\left( a^2(S \pm \sqrt{3}S_A) : b^2(S \pm \sqrt{3}S_B) : c^2(S \pm \sqrt{3}S_C) \right).$$

Pues, el primero satisface a la ecuación de la  $A$ -circunferencia de Apolonio, ya que:

$$\frac{a^2b^2c^2}{(b-c)(b+c)} \left( 3b^2S^2 - 3c^2S^2 + 2\sqrt{3}b^2SS_A - 2\sqrt{3}c^2SS_A + \sqrt{3}a^2SS_B + 3\sqrt{3}b^2SS_B - \sqrt{3}c^2SS_B + 3a^2S_AS_B + 3b^2S_AS_B - 3c^2S_AS_B + 3b^2S_B^2 - \sqrt{3}a^2SS_C + \sqrt{3}b^2SS_C - 3\sqrt{3}c^2SS_C - 3a^2S_AS_C + 3b^2S_AS_C - 3c^2S_AS_C - 3c^2S_C^2 \right).$$

El último factor lo podemos agrupar en la forma siguiente:

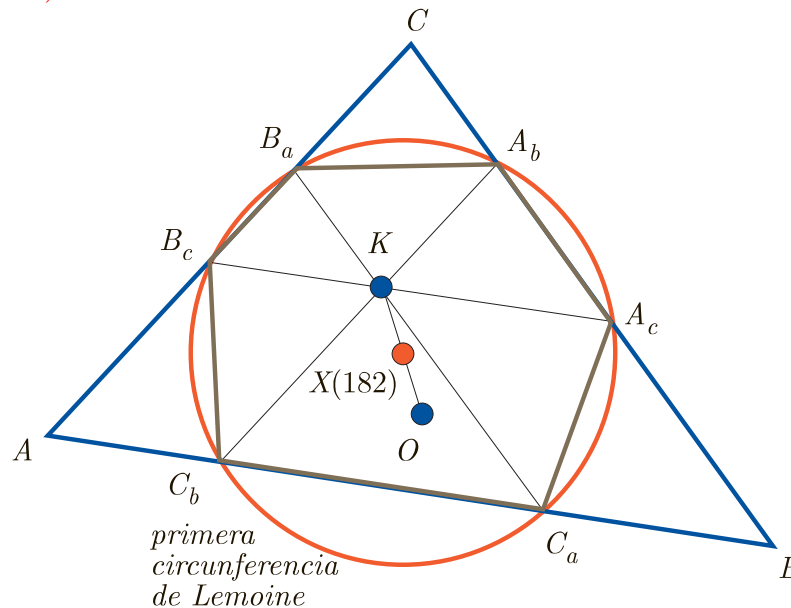
$$\begin{aligned} & 3b^2S^2 - 3c^2S^2 + 2\sqrt{3}b^2SS_A - 2\sqrt{3}c^2SS_A + (\sqrt{3}a^2SS_B + \sqrt{3}b^2SS_B - \sqrt{3}c^2SS_B) + 2\sqrt{3}b^2SS_B + \\ & + (3a^2S_AS_B + 3b^2S_AS_B - 3c^2S_AS_B) + 3b^2S_B^2 + (-\sqrt{3}a^2SS_C + \sqrt{3}b^2SS_C - \sqrt{3}c^2SS_C) - 2\sqrt{3}c^2SS_C \\ & + (-3a^2S_AS_C + 3b^2S_AS_C - 3c^2S_AS_C) - 3c^2S_C^2 = \\ & 3b^2S^2 - 3c^2S^2 + 2\sqrt{3}b^2SS_A - 2\sqrt{3}c^2SS_A + 2\sqrt{3}SS_B S_C + 2\sqrt{3}b^2SS_B + \\ & + 6S_AS_B S_C + 3b^2S_B^2 - 2\sqrt{3}SS_B S_C - 2\sqrt{3}c^2SS_C - 6S_AS_B S_C - 3c^2S_C^2 = \\ & 3b^2(S^2 + S_B^2) - 3c^2(S^2 + S_C^2) + 2\sqrt{3}b^2S(S_A + S_B) - 2\sqrt{3}c^2S(S_A + S_C) = \\ & 3b^2a^2c^2 - 3c^2a^2b^2 + 2\sqrt{3}b^2c^2S - 2\sqrt{3}c^2b^2S = 0. \end{aligned}$$

Similarmente, se comprueba que este punto isodinámico, satisface a las ecuaciones de las otras dos circunferencias de Apolonio. Y, así mismo, que el segundo punto isodinámico satisface a las ecuaciones de las tres circunferencias de Apolonio. Para otra interpretación de los puntos isodinámicos, ver § 16.4.2.

## 20.12 Primera circunferencia de Lemoine

Las paralelas a los lados de un triángulo por su simediano, cortan a sus lados en seis puntos cocíclicos situados en la denominada primera circunferencia de Lemoine <sup>(1)</sup>.

(Applet CabriJava)



<sup>(1)</sup> Conocida también como "Triplicate-Ratio Circle", "Cerchio con rapporto triplicato".

Las paralelas a los lados del triángulo por su simediano  $K(a^2 : b^2 : c^2)$  son:

$$(b^2 + c^2)x - a^2y - a^2z = 0, \quad -b^2x + (a^2 + c^2)y - b^2z = 0, \quad -c^2x - c^2y + (a^2 + b^2)z = 0.$$

Las cuales cortan a los lados, respectivamente, en

$$\begin{aligned} B_a(a^2 : 0 : b^2 + c^2), & \quad C_a(a^2 : b^2 + c^2 : 0), \\ A_b(0 : b^2 : a^2 + c^2), & \quad C_b(a^2 + c^2 : b^2 : 0), \\ A_c(0 : a^2 + b^2 : c^2), & \quad B_c(a^2 + b^2 : 0 : c^2). \end{aligned}$$

A partir de la ecuación de una circunferencia general (19.71)

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy + (x + y + z)(px + qy + rz) = 0,$$

se obtiene que la circunferencia que pasa por los tres primeros puntos, tiene por ecuación:

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - \frac{x + y + z}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} (b^2c^2(b^2 + c^2)x + c^2a^2(c^2 + a^2)y + a^2b^2(a^2 + b^2)z) = 0,$$

la cual contiene a los tres restantes. Su centro tiene por coordenadas

$$\left( a^2(a^2S_A + b^2c^2) : b^2(b^2S_B + c^2a^2) : c^2(c^2S_C + a^2b^2) \right),$$

que es el punto medio ( $X_{182}$  en ETC) del circuncentro y el simediano.

En el hexágono  $A_bB_aB_cC_bC_aA_c$  (hexágono de Lemoine), los lados  $A_bB_a$ ,  $B_cC_b$  y  $C_aA_c$  tienen la misma longitud, igual a

$$d_0 = \frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

El radio de la primera circunferencia de Lemoine es

$$R_0 = \frac{abc\sqrt{a^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2}}{(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(a + b + c)}}.$$

Utilizando (2.5), (2.6) y (2.9), se tiene

$$2R_0 = R \sec \omega.$$

### 20.13 Segunda circunferencia de Lemoine

Cada antiparalela por  $K$  a un lado, respecto a los otros dos, corta a estos en dos puntos. Los seis puntos así determinados son cocíclicos estando en la que se conoce como segunda circunferencia de Lemoine.

La antiparalela a  $BC$  por  $K$  (respecto a  $AB$  y  $AC$ ) es

$$2c^2b^2x - c^2(a^2 - b^2 + c^2)y - (a^2 + b^2 - c^2)b^2z = 0.$$

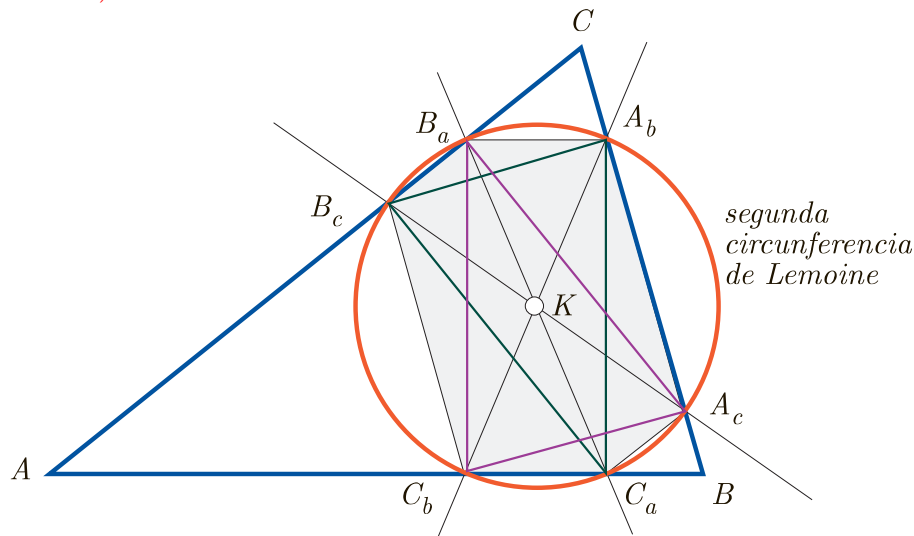
La antiparalela a  $CA$  por  $K$  (respecto a  $BA$  y  $BC$ ) es

$$-c^2(-a^2 + b^2 + c^2)x + 2a^2c^2y - a^2(a^2 + b^2 - c^2)z = 0.$$

La antiparalela a  $AB$  por  $K$  (respecto a  $CA$  y  $CB$ ) es

$$b^2(-a^2 + b^2 + c^2)x + a^2(a^2 - b^2 + c^2)y - 2a^2b^2z = 0.$$

(Applet CabriJava)



Entonces los puntos

$$\begin{aligned} B_a &(-a^2 - b^2 + c^2 : 0 : -2c^2), & C_a &(a^2 - b^2 + c^2 : 2b^2 : 0), \\ A_b &(0 : a^2 + b^2 - c^2 : 2c^2), & C_b &(-2a^2 : a^2 - b^2 - c^2 : 0), \\ A_c &(0 : 2b^2 : a^2 - b^2 + c^2), & B_c &(-2a^2 : 0 : a^2 - b^2 - c^2), \end{aligned}$$

están en la circunferencia:

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy - \frac{4(x+y+z)}{(a^2+b^2+c^2)^2} (b^2c^2S_Ax + c^2a^2S_By + a^2b^2S_Cz) = 0.$$

Ésta es la segunda circunferencia de Lemoine (o circunferencia coseno <sup>(1)</sup>) y su centro es simedianano  $K(a^2 : b^2 : c^2)$ .

El radio de la segunda circunferencia de Lemoine es

$$R_{-1} = \frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

La relación con el radio  $R_0$  de la primera circunferencia de Lemoine y el radio  $R$  de la circunferencia circunscrita a  $\widehat{ABC}$  es

$$R_{-1}^2 + R^2 = 4R_0^2.$$

Otras propiedades:

- Los triángulos  $\widehat{A_bB_cC_a}$  y  $\widehat{B_aC_bA_c}$  son simétricos respecto a  $K$ .
- El punto medio de la altura y el pie de la mediana desde el mismo vértices están alineado con  $K(a^2 : b^2 : c^2)$ :

$$\begin{vmatrix} a^2 & S_C & S_B \\ 0 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} S_C & b^2 & S_A \\ 1 & 0 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} S_B & S_A & c^2 \\ 1 & 1 & 0 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0.$$

- El hexágono  $A_bB_aB_cC_bC_aA_c$  tiene sus lados paralelos a los del triángulo  $\widehat{ABC}$  y sus diagonales no maximales son perpendiculares a los lados del triángulo.

<sup>(1)</sup> Los segmentos  $A_bA_c, B_cB_a$  y  $C_aC_b$  son proporcionales a los ángulo opuestos, a ahí el nombre de circunferencia coseno.

## 21 Puntos de tangencia de circunferencias notables

Como ejemplo de utilización de las ecuaciones de circunferencias en coordenadas baricéntricas, vamos a obtener las coordenadas de los puntos de tangencia entre las circunferencias de los nueve puntos  $N(R/2)$  con la inscrita  $I(r)$  y con las exinscritas  $I_a(r_a), I_b(r_b), I_c(r_c)$ .

**21.1** Comenzamos con el punto de Feuerbach que es el único punto común de las circunferencias inscrita y de los nueve puntos de un triángulo.

El eje radical de estas circunferencias se obtiene restando sus ecuaciones (20.79) y (20.78):

$$(2(s-a)^2 - S_A)x + (2(s-b)^2 - S_B)y + (2(s-c)^2 - S_C)z = 0 \quad \text{o bien} \quad \frac{x}{b-c} + \frac{y}{c-a} + \frac{z}{a-b} = 0.$$

Probemos que esta recta satisface a la ecuación tangencial de la circunferencia de los nueve puntos; es decir, que es tangente a ella. Por tanto, también es tangente a la circunferencia inscrita: el punto de tangencia es el punto común a ambas circunferencias.

La matriz asociada a la circunferencia de los nueve puntos y su adjunta son, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} -2S_A & c^2 & b^2 \\ c^2 & -2S_B & a^2 \\ b^2 & a^2 & -2S_C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4S_B S_C - a^4 & a^2 b^2 + 2c^2 S_C & 2S_B b^2 + a^2 c^2 \\ a^2 b^2 + 2c^2 S_C & 4S_A S_C - b^4 & 2S_A a^2 + b^2 c^2 \\ 2S_B b^2 + a^2 c^2 & 2S_A a^2 + b^2 c^2 & 4S_A S_B - c^4 \end{pmatrix},$$

Para que el eje radical sea tangente se debe anular la expresión que resulta de sustituir en la ecuación tangencial, los coeficientes de la ecuación del eje radical <sup>(1)</sup>, que puede simplificarse en ésta:

$$8abc(2s - (a + b + c))((a^2 + b^2 + c^2)^2 - 6S^2 - 4s((s-a)S_A + (s-b)S_B + (s-c)S_C)),$$

la cual se anula, pues  $2s = a + b + c$ .

El polo respecto a  $N(R/2)$  del eje radical, que es el punto común a ambas circunferencias, tiene primera coordenada (las otras se obtienen permutando cíclicamente):

$$(S_B - 2(s-b)^2)(a^2 b^2 + 2c^2 S_C) + (a^2 c^2 + 2b^2 S_B)(S_C - 2(s-c)^2) + (S_A - 2(s-a)^2)(-a^4 + 4S_B S_C)$$

Al sustituir los valores  $S_A, S_B, S_C$  y  $s$ , se obtiene que las coordenadas del punto de Feuerbach,  $X_{11}$  en ETC, son

$$F \left( (-a + b + c)(b - c)^2 : (a - b + c)(c - a)^2 : (a + b - c)(a - b)^2 \right).$$

Los cálculos resultan mucho más sencillos si, en vez de partir de la circunferencia de los nueve puntos, tomamos la ecuación de la circunferencia inscrita, cuyas matrices asociada a la ecuación puntual y tangencial son respectivamente:

$$\begin{pmatrix} -(s-a)^2 & (s-a)(s-b) & (s-a)(s-c) \\ (s-a)(s-b) & -(s-b)^2 & (s-c)(s-b) \\ (s-a)(s-c) & (s-c)(s-b) & -(s-c)^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & s-c & s-b \\ s-c & 0 & s-a \\ s-b & s-a & 0 \end{pmatrix}.$$

<sup>(1)</sup> Las ecuaciones matriciales puntual y tangencial de una cónica se expresan por  ${}^t X M X = 0$  y  ${}^t U M^\# U = 0$ , donde  $M$  y  $M^\#$  son las matrices asociadas a las cónicas ( $M^\#$  es la adjunta de  $M$ ) y  $X$  y  $U$  son matrices columnas formadas por las coordenadas de punto y recta, respectivamente.

El eje radical es tangente a la circunferencia inscrita:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{b-c} & \frac{1}{c-a} & \frac{1}{a-b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & s-c & s-b \\ s-c & 0 & s-a \\ s-b & s-a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{b-c} \\ \frac{1}{c-a} \\ \frac{1}{a-b} \end{pmatrix} = 0.$$

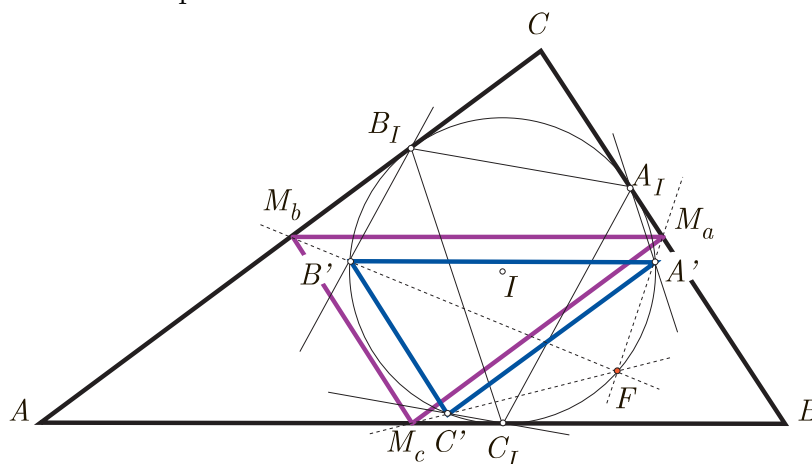
Y el punto de Feuerbach es:

$$\begin{pmatrix} 0 & s-c & s-b \\ s-c & 0 & s-a \\ s-b & s-a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{b-c} \\ \frac{1}{c-a} \\ \frac{1}{a-b} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{(s-a)(b-c)}{(c-a)(a-b)} \\ \frac{(s-b)(c-a)}{(a-b)(b-c)} \\ \frac{(s-c)(a-b)}{(b-c)(c-a)} \end{pmatrix}.$$

**21.2** Posibles construcciones del punto de Feuerbach se basan en los dos resultados que se exponen a continuación. Otra construcción en <http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2354.pdf> o en <http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2455.pdf>.

El triángulo medial de  $\widehat{ABC}$  es perspectivo con el triángulo  $\widehat{A'B'C'}$ , formados por los otros puntos en que los lados del triángulo anticomplementario del triángulo de contacto interior, vuelven a cortar a la circunferencia inscrita a  $\widehat{ABC}$ .

En otras palabras: "Sean  $A_I, B_I$  y  $C_I$  los puntos de contacto de la circunferencia inscrita a  $\widehat{ABC}$  con sus lados. La paralela por  $A_I$  a  $B_I C_I$  corta a la circunferencia inscrita en  $A'$  (este punto es el simétrico de  $A_I$  respecto a la bisectriz en  $A$ ); entonces, la recta  $A' M_a$  ( $M_a$  es el punto medio de  $BC$ ) vuelve a cortarla en el punto de Feuerbach".



Los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con  $\widehat{ABC}$  son (12.50):

$$A_I(0 : a + b - c : a - b + c), \quad B_I(a + b - c : 0 : -a + b + c), \quad C_I(a - b + c : -a + b + c : 0).$$

La ecuación de la circunferencia inscrita es (20.79):

$$a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy - \frac{1}{4}(x + y + z) \left( (a^2 + b^2 + c^2 + 2(-ab + bc - ca)) x + (a^2 + b^2 + c^2 + 2(-ab - bc + ca)) y + (a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - bc - ca)) z \right) = 0.$$

Las paralelas por  $A_I$  a  $B_I C_I$ , por  $B_I$  a  $C_I A_I$  y por  $C_I$  a  $A_I B_I$  son, respectivamente:

$$\begin{aligned} &(a(b+c) - (b-c)^2)x + (b-c)(a-b+c)y - (b-c)(a+b-c)z = 0, \\ &-(c-a)(-a+b+c)x + (b(c+a) - (c-a)^2)y + (c-a)(a+b-c)z = 0, \\ &(a-b)(-a+b+c)x - (a-b)(a-b+c)y + (c(a+b) - (a-b)^2)z = 0. \end{aligned}$$

Estas rectas vuelven a cortar a la circunferencia inscrita, respectivamente, en los puntos:

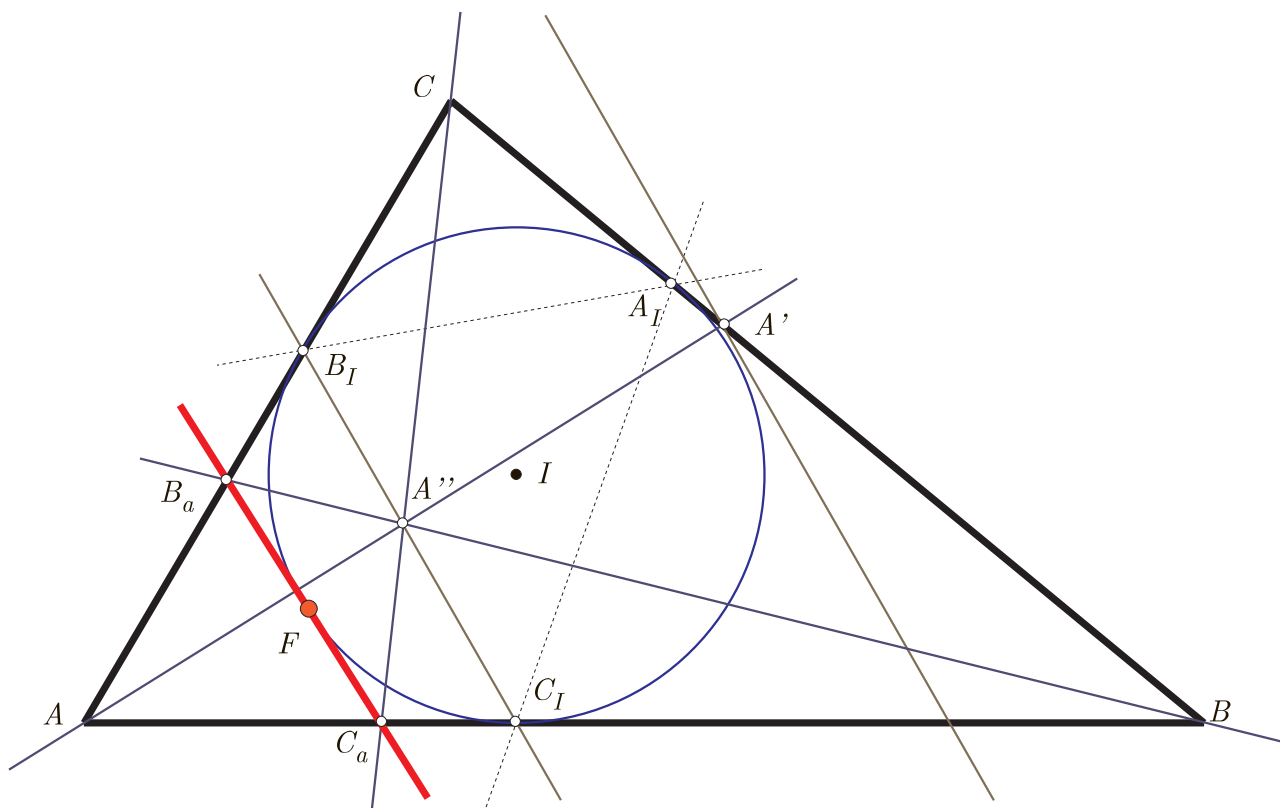
$$\begin{aligned} &A' \left( (-a+b+c)(b-c)^2 : (a-b+c)b^2 : (a+b-c)c^2 \right), \\ &B' \left( (-a+b+c)a^2 : (a-b+c)(c-a)^2 : (a+b-c)c^2 \right), \\ &C' \left( (-a+b+c)a^2 : (-a+b+c)a^2 : (a+b-c)(a-b)^2 \right). \end{aligned}$$

Las ecuaciones de las rectas que  $A'M_a$ ,  $B'M_b$  y  $C'M_c$  son, respectivamente:

$$\begin{aligned} &(b^2 + c^2 - a(b+c))x + (b-c)(-a+b+c)y + (a-b-c)(b-c)z = 0, \\ &(-a+b-c)(c-a)x + (c^2 + a^2 - b(c+a))y + (c-a)(a-b+c)z = 0 \\ &(a-b)(a+b-c)x + (-a-b+c)(a-b)y + (a^2 + b^2 - c(a+b))z = 0; \end{aligned}$$

las cuales concurren en el punto de Feuerbach.

Sea el triángulo  $\widehat{ABC}$  y  $A_I, B_I, C_I$  los puntos de contacto de sus lados con su circunferencia inscrita, de centro  $I$ . La recta  $BC$  corta a la homotética de  $B_I C_I$ , mediante la homotecia de centro en el vértice  $A$  y razón 2, en el punto  $A'$ . La recta  $AA'$  corta a  $B_I C_I$  en  $A''$ . Entonces la recta determinada por los puntos  $BA'' \cap AC$  y  $CA'' \cap AB$  es tangente a la circunferencia inscrita en el punto de Feuerbach.





Los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con los lados de  $\widehat{ABC}$ , en coordenadas baricéntricas homogéneas respecto a  $\widehat{ABC}$ , son

$$A_I(0 : a + b - c : a - b + c), \quad B_I(a + b - c : 0 : -a + b + c), \quad C_I(a - b + c : -a + b + c : 0).$$

La ecuación de la recta  $B_I C_I$  y de su homotética, mediante la homotecia de centro en  $A(1 : 0 : 0)$  y razón 2, son, respectivamente:

$$(a - b - c)x + (a - b)y + (a - c)z = 0, \quad (-a + c)x + (-b + c)y + (-a - b + c)z = 0.$$

Ésta última corta al lado  $BC$  ( $x = 0$ ) en el punto  $A'(0 : a + b - c : c - b)$ .

La recta  $AA' : (a - b)y + (a - c)z = 0$  corta a  $B_I C_I$  en el punto  $A''(b - c : a - c : -a + b)$ .

Los puntos de intersección de las rectas  $BA''$  y  $AC$  y de las rectas  $CA''$  y  $AB$  son, respectivamente,

$$B_a(-b + c : 0 : a - b), \quad C_a(-b + c : -a + c : 0).$$

La recta que pasa por estos puntos tiene por ecuación:

$$B_a C_a : (a - b)(a - c)x - (a - b)(b - c)y + (a - c)(b - c)z = 0.$$

Esta es la recta tangente a la circunferencia inscrita en el punto de Feuerbach.

Este resultado nos da un criterio para construir el punto de Feuerbach: "Es el simétrico de  $B_I$  respecto a  $IB_a$ ". o "Es el simétrico de  $C_I$  respecto a  $IC_a$ ".

Si en vez de partir del vértice  $A$ , hacemos el estudio desde los vértices  $B$  o  $C$ , procediendo cíclicamente, se obtiene el mismo punto de tangencia con la circunferencia inscrita de las rectas  $C_b A_b$  y  $A_c B_c$ . realmente ocurre que  $A_b = A_c$ ,  $B_a = B_c$  y  $C_a = C_b$ .

- Las rectas  $AA'$ ,  $BB'$  y  $CC'$  son paralelas:

$$AA' : (a - b)y + (a - c)z = 0, \quad BB' : (b - c)z + (b - a)x = 0, \quad CC' : (c - a)x + (c - b)y = 0,$$

y su punto del infinito es

$$(b - c : c - a : a - b),$$

que es el  $X_{514}$  en ETC.

Dado un triángulo  $\widehat{ABC}$ , sea  $I$  el centro de la circunferencia inscrita,  $T$  un punto de ésta y  $t$  su tangente en  $T$ . Las perpendiculares a  $IA, IB$  e  $IC$  por  $I$  cortan a  $t$  en  $A', B'$  y  $C'$ , respectivamente. Entonces, las rectas  $AA', BB'$  y  $CC'$  son concurrentes.

Las perpendiculares a  $IA, IB$  e  $IC$  por  $I(a : b : c)$  tienen por ecuaciones

$$\begin{aligned} 2bc(bc + S_A)x - c(a(bc + S_A) + bS_B - cS_C)y - b(a(bc + S_A) - bS_B + cS_C)z &= 0, \\ -c(b(ca + S_B) - cS_C + aS_A)x + 2ca(ca + S_B)y - a(b(ca + S_B) + cS_C - aS_A)z &= 0, \\ -b(c(ab + S_C) + aS_A - bS_B)x - a(c(ab + S_C) - aS_A + bS_B)y + 2ab(ab + S_C)z &= 0. \end{aligned}$$

La tangente común a la circunferencia inscrita y de los nueve puntos de  $\widehat{ABC}$  en el punto común (punto de Feuerbach),  $((b - c)^2(b + c - a) : (c - a)^2(c + a - b) : (a - b)(a + b - c))$ , tiene por ecuación (pág. 126):

$$\frac{x}{b - c} + \frac{y}{c - a} + \frac{z}{a - b} = 0.$$

La intersección de esta recta con las tres anteriores da los puntos

$$A' \left( (b-c)(2abc - a^2(b+c) + (b-c)^2(b+c)) : b(c-a)(a+c-b)(a+b-2c) : c(a-b)(b+a-c)(a+c-2b) \right),$$

$$B' \left( a(b-c)(c+b-a)(b+a-2c) : (c-a)(2abc - b^2(c+a) + (c-a)^2(c+a)) : c(a-b)(b+a-c)(b+c-2a) \right),$$

$$C' \left( a(b-c)(c+b-a)(c+a-2b) : b(c-a)(a+c-b)(c+b-2a) : (a-b)(2abc - c^2(a+b) + (a-b)^2(a+b)) \right).$$

Las rectas  $AA'$ ,  $BB'$  y  $CC'$  concurren en el punto del tipo de los de la Enciclopedia de Kimberling:

$$\left( a(b-c)(b+c-a)(a-2b+c)(a+b-2c) : b(c-a)(c+a-b)(b-2c+a)(b+c-2a) : \right. \\ \left. c(a-b)(a+b-c)(c-2a+b)(c+a-2b) \right).$$

Este punto es el producto baricéntrico del  $X_{650}$ , conjugado isogonal del polo trilineal de la recta  $IO$  (recta que pasa por el incentro y circuncentro de  $ABC$ ) por el punto  $X_{903}$ ; éste último punto es el de concurrencia de las rectas  $AD'$ ,  $BE'$ ,  $CF'$ , siendo  $D'$ ,  $E'$ ,  $F'$  los simétricos, respecto al baricentro  $G$ , de los puntos de corte  $D$ ,  $E$ ,  $F$  de la recta  $GI$  con los lados  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . En efecto:

La recta  $IO$  es:

$$bc(-bS_B + cS_C)x + ac(aS_A - cS_C)y + ab(-aS_A + bS_B)z = 0.$$

El conjugado isogonal de su polo trilineal es

$$\left( a^2bc(-bS_B + cS_C) : b^2ac(aS_A - cS_C) : c^2ab(-aS_A + bS_B) \right) = \\ \left( a(b+c-a)(b-c) : b(c+a-b)(c-a) : c(a+b-c)(a-b) \right),$$

que es el punto  $X_{650}$  en ETC.

Por otra parte, la recta  $GI$ ,  $(b-c)x + (c-a)y + (a-b)z = 0$ , corta a los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  en

$$D(0 : a-b, a-c), \quad E(a-b : 0 : c-b), \quad F(a-c : b-c : 0).$$

Los simétricos de estos respecto a  $G(1 : 1 : 1)$  son:

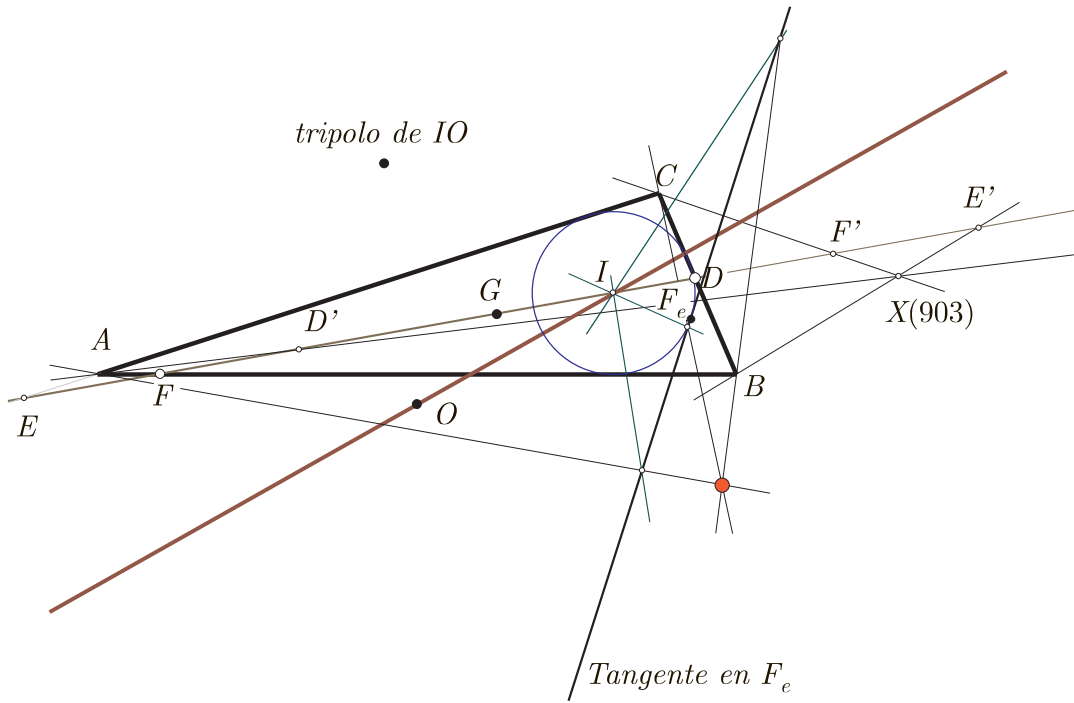
$$D'(2(2a-b-c) : a+b-2c : a-2b+c), \\ E'(a+b-2c : 2(-a+2b-c) : -2a+b+c), \\ F'(-a+2b-c : 2a-b-c : 2(a+b-2c)).$$

Las ecuaciones de las rectas  $AD'$ ,  $BE'$  y  $CF'$  son

$$(a-2b+c)y + (-a-b+2c)z = 0, \quad (2a-b-c)x + (a+b-2c)z = 0, \quad (-2a+b+c)x + (-a+2b-c)y = 0,$$

que concurren en  $X_{903}$ :

$$\left( (a+b-2c)(a-2b+c) : (b+c-2a)(b-2c+a) : (c+a-2b)(c-2a+b) \right).$$



X(650)

(<http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2317.pdf>).



**21.3** El eje radical de la circunferencia de los nueve puntos  $N(R/2)$  y la exinscrita  $I_a(r_a)$ , se obtiene restando las ecuaciones de ambas, por lo que tiene de ecuación:

$$(2s^2 - S_A)x + (2c^2 - 4cs + 2s^2 - S_B)y + (2b^2 - 4bs + 2s^2 - S_C)z = 0,$$

o bien

$$(a + b)(a + c)x + (a + b)(b - c)y - (b - c)(a + c)z = 0, \quad \text{ó} \quad \frac{x}{b - c} + \frac{y}{a + c} - \frac{z}{a + b} = 0.$$

Para comprobar que el eje radical es tangente a ambas circunferencias (y, por consiguiente, su punto de tangencia es común a ambas) basta con comprobar que lo es a una de ellas. Para que sea tangente a  $I_a(r_a)$ , debe contener a su polo respecto a la ella; es decir, se debe anular la expresión que resulta de sustituir en la ecuación tangencial de  $I_a(r_a)$  los coeficientes de la ecuación del eje radical:

$$\left( \frac{1}{b - c} \quad \frac{1}{a + c} \quad \frac{-1}{a + b} \right) \begin{pmatrix} 0 & -s(s - b)^2(s - c) & -s(s - b)(s - c)^2 \\ -s(s - b)^2(s - c) & 0 & s^2(s - b)(s - c) \\ -s(s - b)(s - c)^2 & s^2(s - b)(s - c) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{b - c} \\ \frac{1}{a + c} \\ \frac{-1}{a + b} \end{pmatrix} = 0.$$

Y el punto de tangencia es:

$$\begin{pmatrix} 0 & -s(s-b)^2(s-c) & -s(s-b)(s-c)^2 \\ -s(s-b)^2(s-c) & 0 & s^2(s-b)(s-c) \\ -s(s-b)(s-c)^2 & s^2(s-b)(s-c) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{b-c} \\ \frac{1}{a+c} \\ \frac{-1}{a+b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(b-c)^2 \\ (c-s)(a+c)^2 \\ (b-s)(a+b)^2 \end{pmatrix}.$$

Análogamente, se obtienen los otros puntos de tangencia de las circunferencias de los nueve puntos con  $I_b(r_b)$  y  $I_c(r_c)$ :

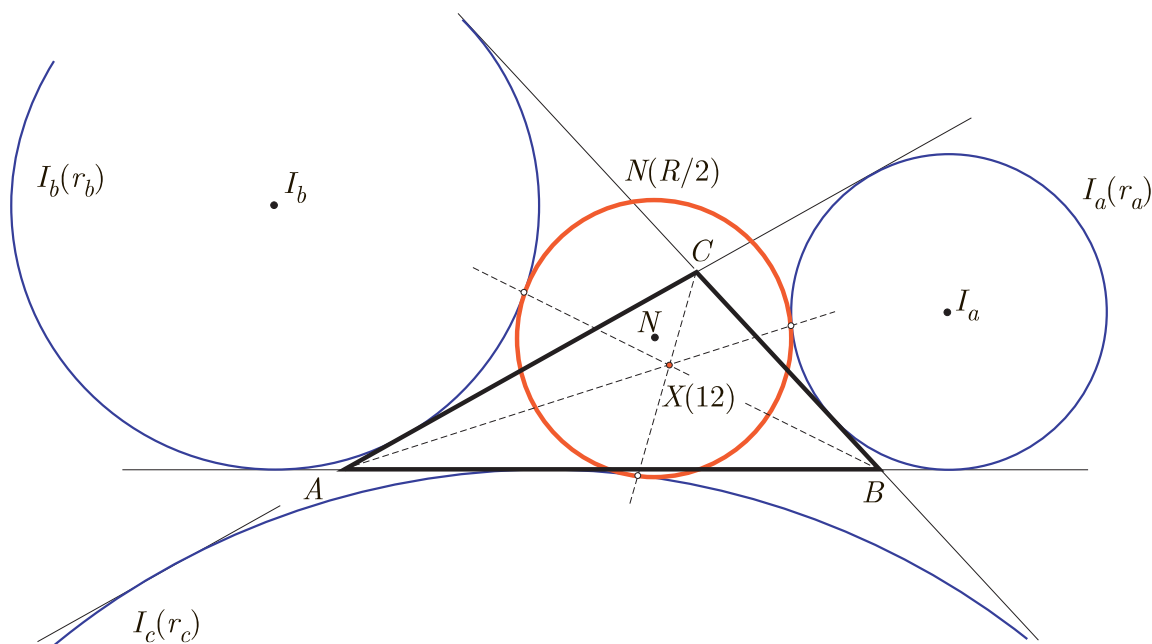
$$((c-s)(b+c)^2 : s(c-a)^2 : (a-s)(b+a)^2), \quad ((b-s)(c+b)^2 : (a-s)(c+a)^2 : s(a-b)^2).$$

Estos tres puntos de tangencia forman un triángulo ( triángulo de Feuerbach) perspectivo con  $\widehat{ABC}$  y su centro de perspectividad es el punto de coordenadas

$$((-a^2 + (b-c)^2)(b+c)^2 : (-b^2 + (c-a)^2)(c+a)^2 : (-c^2 + (a-b)^2)(a+b)^2),$$

que es el punto  $X_{12}$  en ETC, y que se puede, también, expresar como:

$$\left( \frac{(b+c)^2}{s-a} : \frac{(c+a)^2}{s-b} : \frac{(a+b)^2}{s-c} \right).$$



El centro radical de las circunferencias exinscritas (punto de igual potencia respecto a las tres) es el punto de Spieker (pág 104):

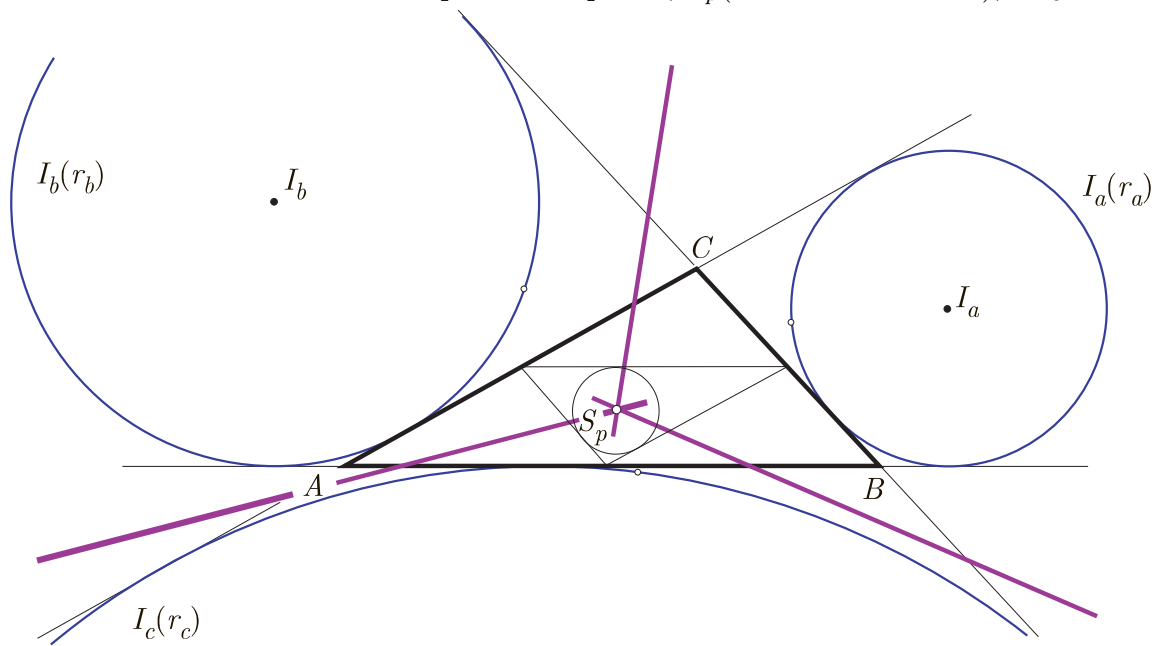
Si un punto  $(x : y : z)$  tiene la misma potencia respecto a las tres circunferencias exinscritas, debe satisfacer al sistema de ecuaciones:

$$s^2x + (s-c)^2y + (s-b)^2z = (s-c)^2x + s^2y + (s-a)^2z = (s-b)^2x + (s-a)^2y + s^2z = 0.$$

Restando el segundo miembro de estas igualdades al primero y el tercero al segundo, resultan las ecuaciones:

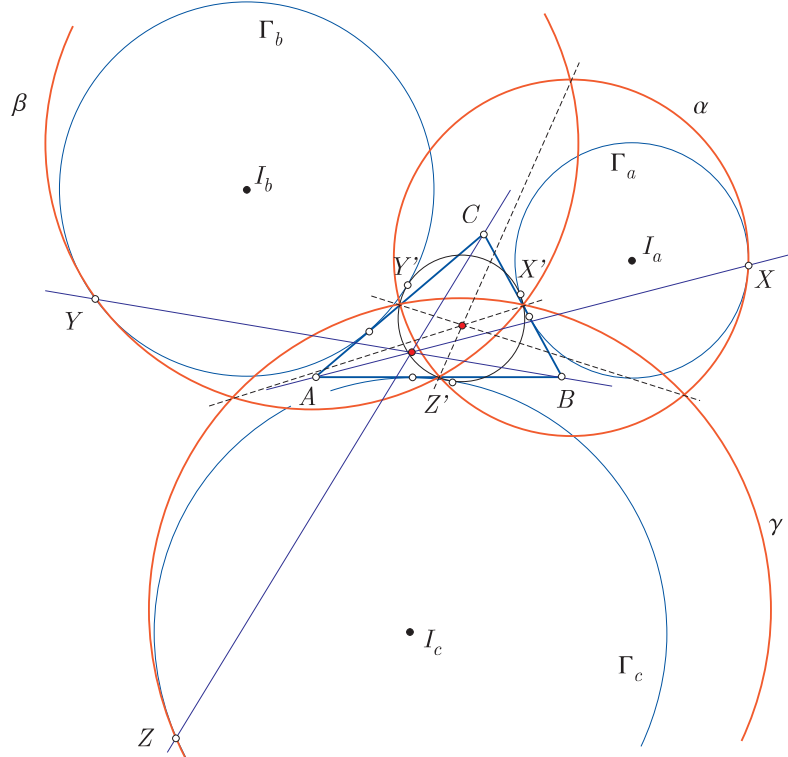
$$(a+b)x - (a+b)y + (a-b)z = 0, \quad (b-c)x + (b+c)y - (b+c)z = 0,$$

cuya solución son las coordenadas del punto de Spieker,  $S_p(b + c : c + a : a + b)$ ,  $X_{10}$  de ETC.



Sea  $\alpha$  a circunferencia pasando por los puntos medios  $M_b$  y  $M_c$  de los lados  $AC$  y  $AB$ , respectivamente, y tocando internamente a la circunferencia  $A$ -exinscrita,  $\Gamma_a$ , en el punto  $X$ . Similarmente se consideran las circunferencia  $\beta$  y  $\gamma$  tangentes internamente en los puntos  $Y$  y  $Z$  a las circunferencias  $\Gamma_b$  y  $\Gamma_c$ . Entonces, los triángulos  $\overline{ABC}$  y  $\overline{XYZ}$  son perspectivas, con centro de perspectividad en el punto de coordenadas baricéntricas  $((b + c - a)(b + c)^2 : (a - b + c)(a + c)^2 : (a + b - c)(a + b)^2)$ .

(Ver <http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2457.pdf>)



## Referencias

- [1] Coxeter, H. S. M.- "Barycentric Coordinates." §13.7 in Introduction to Geometry, 3rd ed. New York: Wiley, pp. 216-221, 1963.
- [2] Eddy, R. H. and Fritsch, R.- "The Conics of Ludwig Kiepert: A Comprehensive Lesson in the Geometry of the Triangle." Math. Mag. 67, 188-205, 1994.
- [3] Eves, Howard.- A Survey of Geometry, Allyn and Baker, Inc., 1963.
- [4] F(rere). G(abriel).-M(arie)., Exercices de Géométrie 6me Ed., Editions Jacques Gabay, 1991 (reprint OF 1920)
- [5] García Capitán, Fancisco Javier.- "Coordenadas baricéntricas."  
Disponible en: <http://garciacapitan.auna.com/baricentricas/>
- [6] García Capitán, Fancisco Javier.- "Giros con baricéntricas." 2006.  
Disponible en: [www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol309garcap/sol309garcap.pdf](http://www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol309garcap/sol309garcap.pdf)
- [7] Gilbert, Bernard.- "Bicevian Tucker Circles." Forum Geometricorum 7(2007) 87-97.
- [8] Grinberg, D. and Yiu, P.- "The Apollonius Circle as a Tucker Circle." Forum Geom. 2(2002), 175-182.
- [9] Kimberling C. .- "Triangle Centers and Central Triangles." Congressus Numerantium 129, Winnipeg, Canada, 1998.
- [10] Kimberling C. .- Encyclopedia of Triangle Centers.  
<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
- [11] Lalesco T. .- La géométrie du triangle, Gabay, Paris, 1987.
- [12] Lemoine, L. .- "Queques propriétés des parallèles et des antiparallèles aux côtés d'un triangle. Bulletin de la S. M. F. 12(1884) 72-78.  
Disponible en:  
[http://archive.numdam.org/ARCHIVE/BSMF/BSMF\\_1884\\_\\_12\\_/BSMF\\_1884\\_\\_12\\_\\_72\\_0/BSMF\\_1884\\_\\_12\\_\\_72\\_0.pdf](http://archive.numdam.org/ARCHIVE/BSMF/BSMF_1884__12_/BSMF_1884__12__72_0/BSMF_1884__12__72_0.pdf)
- [13] Montesdeoca, A.- Geometría proyectiva. Cónicas y Cuádricas. Colección Textos Universitarios. Gobierno de Canarias. 2001.  
Disponible en: <http://webpages.ull.es/users/amontes/apuntes/gdh.pdf>
- [14] Möbius A. F.: Der barycentrische Calcul. Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1827.
- [15] Pedoe, Dan .- Geometry. A comprehensive course. Dover
- [16] Puig Adam, P.- Curso de Geometría Métrica (2 vols.). Biblioteca Matemática S.L. Madrid 1973.
- [17] Volenec, Vladimir.- Metrical relations in barycentric coordinates. Mathematical Communications 8(2003), 55-68.
- [18] Volenec, Vladimir.- Circles in barycentric coordinates. Mathematical Communications 9(2004), 79-89.

- [19] Yiu P. : The uses of homogeneous barycentric coordinates in euclidean plane geometry. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 31, pp.569-578, 2000. [www.math.fau.edu/yiu/barycentricpaper.pdf](http://www.math.fau.edu/yiu/barycentricpaper.pdf)
- [20] Yiu, Paul.- Introduction to Geometry of the Triangle. está disponible en <http://www.math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.ps>

### Algunas páginas web, en las que figura geometría del triángulo:

<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/index.html>. The Encyclopedia of Triangle Centers” de Clark Kimberling (ETC).

<http://mathworld.wolfram.com/topics/Geometry.html>. WolframMathWorld.

<http://www.math.fau.edu/yiu/geometry.html>. Paul Yiu. Department of Mathematics. Florida Atlantic University.

[http://de.geocities.com/darij\\_grinberg/index.html](http://de.geocities.com/darij_grinberg/index.html). Bernard Gibert. Cubics of the Triangle Plane.

<http://pagesperso-orange.fr/bernard.gibert/index.html>. Darij Grinberg. Website for Euclidean and Triangle Geometry.

<http://home.wxs.nl/lamoen/wiskunde/wiskunde.htm>. Floor van Lamoen. Some notes on Triangle Geometry.

[http://paideiaschool.org/TeacherPages/Steve\\_Sigur/geometryIndex.htm](http://paideiaschool.org/TeacherPages/Steve_Sigur/geometryIndex.htm). Steve Sigur’s Webpages – Triangle Geometry.

<http://garcia capitán.auna.com>. Francisco Javier García Capitán

<http://www.xtec.es/~qcastell/ttw/ttwesp/portada.html>. Todo Triángulos WEB (Quim Castellsaguer)

[www.acm.org.ve/files/DidascaliaGeom.pdf](http://www.acm.org.ve/files/DidascaliaGeom.pdf). Durán Cepada, Darío.- La didascalia geométrica (Una larga lista de propiedades relativas a triángulos, cuyas demostraciones se hacen de manera elemental, es decir, usando geometría del bachillerato).

<http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm>. Laboratorio Virtual de Triángulos con Cabri. Ricardo Barroso.

<http://webs.ono.com/rpe1/resolucio1.htm>. Resolució de triangles. Ricard Peiró

<http://www.gogeometry.com/center/index.html>. Triangle Centers, Plane Geometry Index. Antonio Gutierrez.

<http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/tr.pdf>. Ejercicios de triángulos. Angel Montesdeoca

<http://www.dekovsoft.com/j/index.htm>. Journal of Computer-Generated Euclidean Geometry. Deko Dekov

<http://www.esuppa.it/>. Geometria Elementare. Ercole Suppa

S Í M B O L O S

$(X Y U V)$  : razón doble ..... 99

$(\lambda, \mu, \nu)$  : componentes de un vector, respecto al triángulo  $(\lambda + \mu + \nu = 0)$  ..... 28

$A, B, C$  : vértices (o ángulos en ellos) del triángulo de referencia  $\widehat{ABC}$  ..... 2

$\widehat{ABC}$  : triángulo de referencia ..... 4

$A_P, B_P, C_P$  : pies de las perpendiculares a los lados de  $\widehat{ABC}$  (pedales de  $P$ ) ..... 34

$B_v$  : punto de Bevan,  $X_{40}$  ..... 47

$E_a, E_b, E_c$  : puntos medios de cada vértice de  $\widehat{ABC}$  y su ortocentro ..... 113

$F$  : punto de Feuerbach,  $X_{11}$  ..... 126

$G$  : baricentro,  $X_2$  ..... 10

$G_e$  : punto de Gergonne,  $X_7$  ..... 34

$H$  : ortocentro,  $X_4$  ..... 32

$I$  : incentro,  $X_1$  ..... 10

$I_a(r_a), \dots$  : circunferencias exinscritas ..... 34

$I_a, I_b, I_c$  : centros de las circunferencias exinscritas ..... 35

$J$  : centro de perspectividad de Jacobi, relativo a los ángulos  $\theta_a, \theta_b$  y  $\theta_c$  ..... 72

$J(m, n)$  : centros de perspectividad de Jacobi (Teorema de Kariya) ..... 97

$J^p$  : un centro de perspectividad, relativo al triángulo de Jacobi ..... 72

$J_\theta^p$  : un centro de perspectividad, relativo al triángulo de Jacobi ..... 72

$J^s(m, n)$  : simétrico de  $J(m, n)$ , respecto al punto de Feuerbach. .... 97

$J_\theta$  : centro de perspectividad de Jacobi, cuando  $\theta_a = \theta(A, B, C)$  ..... 72

$J_k$  : centro de perspectividad de Jacobi (Teorema de Kariya) ..... 96

$J_k^s$  : simétrico de  $J_k$ , respecto al punto de Feuerbach. .... 97

$K(\pm \frac{\pi}{3})$  : puntos de Fermat,  $X_{13}$  y  $X_{14}$  ..... 63

$K(\theta)$  : centro de perspectividad de Kiepert ..... 62

$L$  : punto de De Longschamps,  $X_{20}$  ..... 36

$M_a, M_b, M_c$  : pies de las medianas (puntos medios de los lados de  $\widehat{ABC}$ ) ..... 8

$M_t$  : punto intermedio, Mittenpunkt,  $X_9$  ..... 37

$N$  : centro de la circunferencia de los nueve puntos,  $X_5$  ..... 114

$N_a$  : punto de Nagel,  $X_8$  ..... 35

$O$  : circuncentro,  $X_3$  ..... 32



$O(R)$  : circunferencia circunscrita a  $\widehat{ABC}$  ..... 107

$P(x, y, z)$  : coordenadas baricéntricas absolutas ..... 4

$P(x : y : z)$  : coordenadas baricéntricas homogéneas ..... 4

$P/Q$  : cociente ceviano de  $P$  y  $Q$  ..... 104

$PQ$  : recta, segmento o longitud (con signo) determinados por  $P$  y  $Q$  ..... 4

$P^\bullet$  : conjugado isotómico de  $P$  ..... 102

$P_a, P_b, P_c$  : pies de las cevianas de  $P$  ..... 10

$P_i$  : punto de paralelas iguales ..... 6

$R$  : radio de la circunferencia circunscrita a  $\widehat{ABC}$  ..... 3

$S$  : doble del área de  $\widehat{ABC}$  ..... 2

$S_A$  :  $S \cotag A$ , ( $2S_A = -a^2 + b^2 + c^2$ ) ..... 2

$S_B$  :  $S \cotag B$ , ( $2S_B = a^2 - b^2 + c^2$ ) ..... 2

$S_C$  :  $S \cotag C$ , ( $2S_C = a^2 + b^2 - c^2$ ) ..... 2

$S_\theta$  :  $S \cotag \theta$  ..... 2

$S_p$  : punto de Spieker,  $X_{10}$  ..... 104

$V_a, V_b, V_c$  : pies de la bisectrices interiores ..... 10

$\hat{J}$  : centro de perspectividad de triángulo de Jacobi iso-relacionados. .... 73

$\hat{J}_\theta$  : centro de perspectividad de dos triángulos de Jacobi iso-correspondientes. 73

$\omega$  : ángulo de Brocard ( $2SS_\omega = a^2 + b^2 + c^2$ ) ..... 58

$\{P; \vec{u}, \vec{v}\}$  : referencia afín, con origen en  $P$  y vectores básicos  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  ..... 4

$a, b, c$  : longitudes de los lados de  $\widehat{ABC}$ ;  $a = BC, b = CA, c = AB$  ..... 2

$d(p : q : r)$  : coordenadas baricéntricas homogéneas de una recta ..... 9

$r$  : radio de la circunferencia inscrita a  $\widehat{ABC}$  ..... 3

$r_a$  : radio de la circunferencia exinscrita, relativa al vértice  $A$  ..... 3

$s$  : semiperímetro de  $\widehat{ABC}$  ( $2s = a + b + c$ ) ..... 2

ETC : The Encyclopedia of Triangle Centers de Clark Kimberling ..... 23

# Índice alfabético

- A-circunferencia de Apolonio, 122
- ángulo de Brocard, 58
- ángulo entre dos rectas, 47
- ángulo entre vectores, 29
- ángulo orientado entre un par de rectas, 48
- ángulo orientado entre una recta y una dirección, 48
- ángulos orientados de una recta con los lados del triángulo de referencia, 48
- área de un triángulo, 13
  
- anticomplemento, 103
- Apolonio (circunferencia), 122
  
- baricentro ( $X_2$ ), 4, 10
- Bevan (punto), 47
- Brocard (puntos), 56
- Brocard (ángulo), 58
- Brocard (circunferencia), 119
- Brocard (diámetro), 119
- Brocard (primer punto), 57
- Brocard (primer triángulo), 67
- Brocard (segundo punto), 58
- Brocard (tercer punto), 66
- brocardianos de un punto, 58
  
- centro de  $P$ -semejanzas, 107
- centro de la circunferencia de los nueve puntos ( $X_5$ ), 114
- centro de perspectividad, 10
- centro de perspectividad de Jacobi, 72
- centro de perspectividad de Kiepert, 62
- centro de un triángulo, 22
- centros de las circunferencias exinscritas, 35
- Ceva (Teorema), 53
- cevianas, 10
- circuncentro ( $X_3$ ), 30, 32
- circunferencia circunscrita al triángulo excentral, 121
- circunferencia coseno, 125
- circunferencia de Apolonio, 122
- circunferencia de Apolonio de  $ABC$ , 122
- circunferencia de Brocard, 67, 119
- circunferencia de Euler, 113
- circunferencia de Lemoine (primera), 123
- circunferencia de Lemoine (segunda), 124
- circunferencia de los nueve puntos, 113
- circunferencia inscrita, 114
- circunferencia ortobaricéntrica, 118
- circunferencia radical de las exinscritas, 116
- circunferencias adjuntas, 117
- circunferencias de Schröder, 119
- circunferencias exinscritas, 35, 115
- circunferencias exinscritas (centros), 35
- cociente ceviano, 104
- complemento, 103
- complemento del simediano, 79
- componentes de un vector respecto a  $ABC$  dado por sus extremos, 28
- cónica polar, 101
- conjugado isogonal, 54, 55
- conjugado isotómico, 102
- conjugado isotómico del ortocentro ( $X_{69}$ ), 36
  
- conjugados armónicos, 99
- Conway (fórmula), 62
- Conway (notación), 2
- coordenadas areales, 12
- coordenadas baricéntricas absolutas, 4
- coordenadas baricéntricas de una recta, 9
- coordenadas baricéntricas homogéneas, 4
- coordenadas baricéntricas, en términos de áreas, 12
- coordenadas trilineales exactas, 21
- coordenadas trilineales homogéneas, 21
- cuaterna armónica, 99
- cúbica de Darboux, 37
  
- Darboux (cúbica), 37
- De Longschamps (punto), 36
- De Villiers (primer punto), 84
- De Villiers (segundo punto), 87
- diámetro de Brocard, 119
- distancia de un punto a los vértices del triángulo de referencia, 30
- distancia entre dos puntos, 30
- dividir un segmento en una razón dada, 8
  
- ecuación circunferencia circunscrita al triángulo excentral, 121
- ecuación de la bisectriz en  $A$ , 17
- ecuación de la circunferencia circunscrita, 18, 107
- ecuación de la circunferencia de Brocard, 119
- ecuación de la circunferencia inscrita, 115
- ecuación de la circunferencia ortobaricéntrica, 118
- ecuación de la circunferencia radical, 117
- ecuación de la recta, 9
- ecuación de la recta de Euler, 32
- ecuación de la tripolar, 100
- ecuación de una circunferencia general, 108
- ecuaciones de la homotecia, 9
- ecuaciones de las alturas, 17, 32
- ecuaciones de las antiparalelas, 51
- ecuaciones de las bisectrices interiores, 10, 50
- ecuaciones de las circunferencias de Schröder, 119
- ecuaciones de las circunferencias exinscritas, 115
- ecuaciones de las mediatrices, 16, 32
- ecuaciones de las simedianas, 50
- eje de perspectividad, 10
- eje radical de circunferencia general y circunscrita, 108
- eje radical de las circunferencias inscrita y de Euler, 126
- Euler (circunferencia), 113
- Euler (centro y radio circunferencia), 114
- Euler (recta), 32
- exincentros, 35
  
- Fermat (puntos), 63
- Feuerbach (hipérbola), 96
- Feuerbach (punto), 126
- fórmula de Conway, 62
- fórmula de Heron, 3
  
- Gallatly-Kiepert (triángulo exterior), 67
- Gergonne (punto), 34
- giro en coordenadas baricéntricas, 49

- Gray (punto), 80  
 Grebe punto), 51
- Heron (fórmula), 3  
 hexágono de Lemoine, 124  
 hipérbola de Feuerbach, 96  
 hipérbola de Kiepert, 62  
 homotecia (ecuaciones), 9
- incentro ( $X_1$ ), 10
- Jacobi (centro de perspectividad), 72  
 Jacobi (teorema), 71  
 Jacobi (triángulo), 72  
 Jerabek (puntos), 59
- Kariya (teorema), 95  
 Kenmotu (punto), 77  
 Kiepert (centro de perspectividad), 62  
 Kiepert (hipérbola, parábola), 62  
 Kiepert (triángulo), 62  
 Kiepert-Morley-Hofstadter (triángulo), 72  
 Kosnita (punto), 75, 107  
 Kosnita (teorema), 74
- Lemoine (hexágono), 124  
 Lemoine (primera circunferencia), 123  
 Lemoine (punto), 51  
 Lemoine (segunda circunferencia), 124  
 ley de la palanca, 4
- Malfatti-Rabinowitz (segundo punto), 85  
 medianas, 10  
 Menelao (teorema), 14  
 Miquel (teorema), 120  
 Mittenpunkt ( $X_9$ ), 37  
 módulo de un vector, 29
- Nagel (punto), 35  
 Nagel (teorema), 71  
 Napoleón (puntos), 64  
 Napoleón (teorema), 63  
 notación de Conway, 2
- ortocentro ( $X_4$ ), 11, 32
- Paasche (punto), 90  
 par bicéntrico, 23  
 pies de las cevianas, 10  
 pies de las perpendiculares por un punto, 33  
 polar (cociente ceviano), 105  
 polar trilineal, 99  
 polaridad trilineal, 99  
 polo trilineal, 100  
 potencia de un punto respecto a una circunferencia, 108  
 Prasolov (punto), 80  
 primer punto de Brocard, 57  
 primer punto de De Villiers ( $X_{1127}$ ), 84  
 primer punto de Stevanovic ( $X_{1130}$ ), 88, 107  
 primer punto isodinámico ( $X_{15}$ ), 75  
 primer triángulo de Brocard, 67  
 primera circunferencia de Lemoine, 123  
 problema de los tres vasos, 6  
 producto escalar, 29
- punto de Bevan ( $X_{40}$ ), 47  
 punto de De Longschamps ( $X_{20}$ ), 36  
 punto de Feuerbach ( $X_{11}$ ), 126, 127  
 punto de Gergonne ( $X_7$ ), 34  
 punto de Gray ( $X_{79}$ ), 80  
 punto de Grebe ( $X_6$ ), 51  
 punto de Kenmotu ( $X_{371}$ ), 77  
 punto de Kosnita ( $X_{54}$ ), 75, 107  
 punto de Lemoine ( $X_6$ ), 22, 51  
 punto de Nagel ( $X_8$ ), 35  
 punto de Paasche, 90  
 punto de paralelas iguales, 5  
 punto de paralelas iguales ( $X_{192}$ ), 6  
 punto de Prasolov ( $X_{68}$ ), 80  
 punto de Schiffler ( $X_{21}$ ), 33  
 punto de Schröder ( $X_{1155}$ ), 119  
 punto de Spieker ( $X_{10}$ ), 104  
 punto de Tarry ( $X_{98}$ ), 68, 79  
 punto de Yiu-Paasche, 93  
 punto del infinito de la recta  $\Omega_1\Omega_2$  ( $X_{512}$ ), 58  
 punto del infinito de la recta de Euler ( $X_{30}$ ), 32  
 punto del infinito de una recta, 8  
 punto del infinito de una recta perpendicular a otra, 19, 31  
 punto intermedio ( $X_9$ ), 37  
 punto medio de los puntos de Brocard ( $X_{39}$ ), 58  
 punto medio del circuncentro y el simedianiano ( $X_{182}$ ), 124  
 punto que separa a otros dos en una razón dada, 8  
 puntos bicéntricos, 23  
 puntos cíclicos, 17, 109  
 puntos de Brocard, 56  
 puntos de Fermat ( $X_{13}, X_{14}$ ), 63  
 puntos de Jerabek, 59  
 puntos de Napoleón ( $X_{17}, X_{18}$ ), 64  
 puntos de tangencia de la circunferencia inscrita, 34  
 puntos de tangencia de las circunferencias exinscritas, 35  
 puntos de Vecten ( $X_{485}, X_{486}$ ), 64  
 puntos del infinito de los lados del triángulo de referencia, 8  
 puntos isodinámicos ( $X_{15}, X_{16}$ ), 123  
 puntos isogónicos ( $X_{13}, X_{14}$ ), 63  
 puntos medios de los lados, 8
- radio de la circunferencia circunscrita, 3, 30  
 radio de la circunferencia de Euler,  $R/2$ , 114  
 radio de la circunferencia inscrita, 3  
 radio de una circunferencia general, 111  
 radios de las circunferencias exinscritas, 3  
 razón doble, 99  
 razón en que un punto divide a un segmento, 11  
 recta de Euler, 32  
 recta de Euler (ecuación), 32  
 recta de Euler (punto del infinito), 32  
 recta de Simson–Wallace, 14  
 recta del infinito, 9, 16  
 recta orientada, 47  
 rectas antiparalelas, 51  
 rectas conjugadas isogonales, 54  
 rectas isotropas, 110  
 rectas paralelas, 9  
 rectas perpendiculares, 31  
 relación entre las coord. baricéntricas y trilineales, 21
- Schiffler (punto), 33

- Schröder (circunferencias), [119](#)  
 Schröder (punto), [119](#)  
 segunda circunferencia de Lemoine, [124](#)  
 segundo punto de Brocard, [58](#)  
 segundo punto de De Villiers ( $X_{1128}$ ), [87](#)  
 segundo punto de Malfatti-Rabinowitz ( $X_{1143}$ ), [85](#)  
 segundo punto isodinámico ( $X_{16}$ ), [76](#)  
 simétrico de  $P$  respecto a  $Q$ , [8](#)  
 simediana, [18](#), [50](#)  
 simediano ( $X_6$ ), [22](#), [51](#)  
 Simson-Wallace (recta), [14](#)  
 Simson-Wallace (teorema), [14](#)  
 Spieker (punto), [104](#)  
 Stevanovic (primer punto), [88](#), [107](#)
- Tarry (punto), [68](#)  
 Teorema de Ceva, [53](#)  
 Teorema de Jacobi, [71](#)  
 Teorema de Kariya, [95](#)  
 Teorema de Kosnita, [74](#)  
 Teorema de las bisectrices, [10](#)  
 Teorema de Menelao, [14](#)  
 Teorema de Miquel, [120](#)  
 Teorema de Nagel, [71](#)  
 Teorema de Napoleón, [63](#)  
 Teorema de Simson-Wallace, [14](#)  
 teorema del coseno, [2](#)  
 teorema del seno, [3](#)
- tercer punto de Brocard ( $X_{76}$ ), [66](#)  
 triángulos de Jacobi iso-relacionados, [73](#)  
 triángulo órtico, [34](#)  
 triángulo anticeviano, [103](#)  
 triángulo anticomplementario, [103](#)  
 triángulo ceviano, [10](#)  
 triángulo de contacto interior, [34](#)  
 triángulo de Feuerbach, [132](#)  
 triángulo de Jacobi, [72](#)  
 triángulo de Kiepert, [62](#)  
 triángulo de Kiepert-Morley-Hofstadter, [72](#)  
 triángulo de referencia, [4](#)  
 triángulo excentral, [35](#)  
 triángulo exterior de Gallatly-Kiepert, [67](#)  
 triángulo medial, [10](#)  
 triángulo órtico, [34](#)  
 triángulo pedal, [34](#)  
 triángulo preceviano, [103](#)  
 triángulo tangencial, [18](#), [103](#)  
 triángulos perspectivas, [10](#)  
 tripolar, [99](#)  
 tripolo, [100](#)
- Vecten (puntos), [64](#)  
 vectores perpendiculares, [31](#)
- Yff center of congruence ( $X_{174}$ ), [83](#)  
 Yiu-Paashe (punto), [93](#)

C O N T E N I D O

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Notaciones y algunas fórmulas</b>	<b>2</b>
2.1	Notación de Conway . . . . .	2
2.2	Relaciones entre elementos de un triángulo . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Definición de coordenadas baricéntricas</b>	<b>3</b>
3.1	Coordenadas baricéntricas . . . . .	4
3.2	Punto de paralelas iguales . . . . .	5
<b>4</b>	<b>El problema de los tres vasos</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Dividir un segmento. Ecuación de la recta</b>	<b>7</b>
5.1	Punto que divide a un segmento en una razón dada . . . . .	7
5.2	Ecuación de la recta . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Medianas, bisectrices y alturas</b>	<b>10</b>
6.1	Medianas y bisectrices . . . . .	10
6.2	Cevianas . . . . .	10
6.3	Alturas . . . . .	11
<b>7</b>	<b>Interpretación de las coordenadas baricéntricas mediante áreas</b>	<b>11</b>
7.1	Coordenadas areales . . . . .	11
7.2	Area de un triángulo. Teorema de Simson-Wallace . . . . .	12
7.3	Coordenadas baricéntricas de una recta . . . . .	14
<b>8</b>	<b>Coordenadas baricéntricas y referencia proyectiva</b>	<b>15</b>
8.1	Coordenadas baricéntricas en términos de coordenadas afines homogéneas . . . . .	15
8.2	Algunas expresiones en coordenadas baricéntricas deducidas de las afines . . . . .	16
8.3	Vértices del triángulo tangencial, simedianas y circunferencia circunscrita . . . . .	17
8.4	Rectas perpendiculares . . . . .	18
8.5	Coordenadas baricéntricas respecto a otros triángulos . . . . .	19
8.6	Localización de un punto, dadas sus coordenadas baricéntricas . . . . .	20
<b>9</b>	<b>Coordenadas trilineales</b>	<b>21</b>
9.1	Coordenadas trilineales en términos de coordenadas baricéntricas . . . . .	21
9.2	Coordenadas trilineales en términos de coordenadas afines homogéneas . . . . .	21
<b>10</b>	<b>Puntos de la Enciclopedia de Kimberling</b>	<b>22</b>
10.1	Centros de un triángulo . . . . .	22
10.2	Lista de puntos notables de un triángulo . . . . .	23
<b>11</b>	<b>Producto escalar. Distancia entre puntos</b>	<b>28</b>
11.1	Producto escalar . . . . .	28
11.2	Módulo de un vector . . . . .	29
11.3	Cuadrado de la distancia entre puntos . . . . .	30
11.4	Circuncentro y radio de la circunferencia circunscrita . . . . .	30

<b>12 Perpendicularidad</b>	<b>31</b>
12.1 Rectas perpendiculares . . . . .	31
12.2 Alturas y mediatrices . . . . .	31
12.3 Recta de Euler . . . . .	32
12.4 Triángulo pedal . . . . .	33
12.5 Puntos de Gergonne y Nagel . . . . .	35
12.6 Punto de De Longschamps . . . . .	36
12.7 Punto intermedio . . . . .	37
12.8 Centros similares al $X_{951}$ relativos a la circunferencia inscrita . . . . .	38
12.9 Centros similares a $X_{951}$ asociados a las circunferencias exinscritas . . . . .	41
12.10 Punto de Bevan . . . . .	45
<b>13 Giro de rectas</b>	<b>47</b>
13.1 Ángulo orientado entre un par ordenado de rectas . . . . .	47
13.2 Ortocentro como incentro del triángulo órtico . . . . .	48
13.3 Giros en coordenadas baricéntricas . . . . .	49
13.4 Ecuaciones de las simedianas . . . . .	50
13.5 Simedianas y baricentro de su propio triángulo pedal . . . . .	54
<b>14 Conjugado isogonal</b>	<b>54</b>
14.1 Simétricas de las cevianas respecto a las bisectrices . . . . .	54
14.2 Construcciones del conjugado isogonal . . . . .	55
14.3 Puntos de Brocard . . . . .	56
14.4 Brocardianos . . . . .	58
<b>15 Fórmula de Conway. Centros de perspectiva de Kiepert</b>	<b>61</b>
15.1 Fórmula de Conway . . . . .	61
15.2 Centro de perspectiva de Kiepert . . . . .	62
15.3 Algunos centros de perspectiva de Kiepert . . . . .	62
<b>16 Teorema de Jacobi</b>	<b>71</b>
16.1 Centro de perspectiva de Jacobi . . . . .	71
16.2 Un ejemplo del Teorema de Jacobi . . . . .	73
16.3 Teorema de Kosnita . . . . .	74
16.4 Diversos casos de triángulos de Kiepert-Morley-Hofstadter . . . . .	75
<b>17 Polaridad trilineal</b>	<b>99</b>
17.1 Conjugado armónico . . . . .	99
17.2 Polar y polo trilineal . . . . .	99
<b>18 Conjugado isotómico. Complemento y anticomplemento. Cociente ceviano</b>	<b>101</b>
18.1 Conjugado isotómico . . . . .	102
18.2 Triángulo preceviano . . . . .	102
18.3 Algunos ejemplos . . . . .	104
<b>19 Ecuación de la circunferencia. Centro y radio</b>	<b>107</b>
19.1 Circunferencia circunscrita . . . . .	107
19.2 Ecuación de una circunferencia general . . . . .	108
19.3 Otras formas de obtener la ecuación de la circunferencia circunscrita . . . . .	108
19.4 Centro y radio de una circunferencia . . . . .	111
19.5 Ecuaciones de simedianas . . . . .	112

<b>20 Ecuaciones de circunferencias particulares</b>	<b>112</b>
20.1 Circunferencia de los nueve puntos . . . . .	113
20.2 Circunferencia inscrita . . . . .	114
20.3 Circunferencias exinscritas . . . . .	115
20.4 Circunferencia radical de las exinscritas . . . . .	116
20.5 Circunferencias adjuntas . . . . .	117
20.6 Circunferencia ortobaricéntrica . . . . .	118
20.7 Circunferencias de Schröder . . . . .	119
20.8 Circunferencia de Brocard . . . . .	119
20.9 Circunferencia circunscrita al <u>triángulo</u> excentral . . . . .	121
20.10 Circunferencia de Apolonio de $ABC$ . . . . .	122
20.11 A–circunferencia de Apolonio . . . . .	122
20.12 Primera circunferencia de Lemoine . . . . .	123
20.13 Segunda circunferencia de Lemoine . . . . .	124
<b>21 Puntos de tangencia de circunferencias notables</b>	<b>126</b>
21.1 Punto de Feuerbach . . . . .	126
21.2 Algunas construcciones del punto de Feuerbach . . . . .	127
21.3 Puntos de tangencia de la circunferencia de Euler con las exinscritas . . . . .	131
<b>Referencias</b>	<b>134</b>
<b>Símbolos</b>	<b>136</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>138</b>
<b>Índice de contenido</b>	<b>141</b>