Representación gráfica de curvas

Angel Montesdeoca

Jueves 29 de Julio del 2010

1 Una circunferencia fija tiene por diámetro el segmento que une el origen de coordenadas O y el punto $A(2a, 0)$. Desde O se traza una recta cualquiera que encuentra a la circunferencia en D y a la tangente a la circunferencia en A en E. Lugar geométrico del punto P tomado sobre OE, tal que $\overline{PD} = \overline{DE}$ en longitud y dirección. / Applet CabriJava

2 Se da un triángulo $\widehat{OAB}$, rectángulo en O. Lugar de los puntos M tales que el ángulo $\angle OMA$ sea igual al ángulo $\angle OMB$. / Applet CabriJava

3 Desde el punto $A(-a, 0)$, donde $a > 0$, se traza una recta variable que corta al eje OY en B, a ambos lados del punto B y sobre la recta AB se consideran dos puntos M y N, tales que los segmentos MB y NB tienen la misma longitud, igual a r, al girar la recta variable los puntos M y N describen una curva llamada concoide. (↺) (↺) (↺) Hallar su ecuación, primero, en coordenadas polares tomando el punto A por polo y dirigiendo el eje polar en la dirección positiva del eje OX; y, después, en coordenadas cartesianas respecto al sistema dado. / Applet CabriJava

4 Desde el origen de coordenadas se traza una recta ℓ que corta a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 2ax$ $(a > 0)$ en el punto B; en dicha recta, a ambos lados del punto B, se toman dos puntos M y N, tales que los segmentos BM y BN tengan la misma longitud, igual a b. Hallar el lugar geométrico de los puntos M y N al girar la recta ℓ alrededor del origen. (↺) (↺) (↺) / Applet CabriJava

5 Sean una circunferencia de centro O y radio r y una recta pasando por O, la trisectriz de Ceva es el lugar geométrico de los puntos M tales que $OP = PQ = QM$ con P sobre la circunferencia, Q sobre la recta y tales que O, P y M están alineados. El ángulo $\widehat{xQM}$ es el triple del ángulo $\widehat{xOM}$, de hay el nombre de trisectriz.

6 Se dan dos puntos O y S, la trisectriz de Maclaurin de polo S $(S(3a, 0))$ y punto doble O es el lugar geométrico de los puntos M tales que $OP = PA = AM$ donde A está definido por $\overrightarrow{OA}= \frac{2}{3}\overrightarrow{OS}$ y tal que O, P y M están alineados. El ángulo $\widehat{SAM}$ es el triple del ángulo $\widehat{SOM}$ de donde el nombre de trisectriz. / Applet CabriJava

7 Representar gráficamente la curva $\rho = a \cos n\theta$.

8 Representar gráficamente la curva $\rho = a(1 + \cos \theta)$.

9 Sea una circunferencia tangente en el origen de coordenadas al eje OX. Tracemos la tangente a la circunferencia paralela al eje OX. Tracemos una recta desde el origen que corta a la circunferencia en un punto A y a la tangente en un B. Lugar geométrico del punto P con la ordenada de A y con la abscisa de B (curva de Agnesi). (↺) / Applet CabriJava

10 Sean dos puntos $Q(q, 0)$ y $R(0, r)$ con la suma de q y r constante (a). Ahora se toman los puntos P sobre la recta RQ, tal que PQ es igual a una constante (b). Establecer que el lugar geométrico de P es la concoide de Dürer de ecuación implícita: $(x^2 + xy + ax - b^2)^2 = (b^2 - x^2)(x - y + a)^2$. Hacer la representación gráfica.

11 Dados una recta p y un punto P (llamado polo), que se proyecta perpendicularmente sobre p en O. Tazamos por P rectas r variables. El lugar geométrico de los punto R sobre r para los cuales $OQ = RQ$, donde Q es el punto de corte de r y p, recibe el nombre de estrofoide. Establecer que $y^2 = x^2\dfrac{1+x}{1-x}$ es su ecuación cartesiana, tomando como eje de las "y" la recta p y origen O. Hacer la representación gráfica de la curva. (↺)

12 Representar gráficamente la curva $\rho = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \operatorname{tag}\theta$. (Ver también)

13 Dado un rectángulo $ABCD$, en el lado AB, se considera un punto variable M, y sea N la intersección del lado CD con la paralela por M al lado BC. Sea d una recta por MC y P el punto de intersección del lado AB con la perpendicular por N a d. Se pide el lugar geométrico de Q punto de intersección de las rectas CP, y MN. / Applet CabriJava

14 Establecer que el lugar geométrico de los centros de gravedad M de un hilo de peso homogéneo enrollado alrededor de un circunferencia de centro O y de radio a (uno de los extremos situado en A de coordenadas polares $(a, 0)$ y el otro en $M_0(a, 2\theta)$) tiene por ecuación $\rho = \dfrac{a \operatorname{sen}\theta}{\theta}$. Hacer la representación gráfica de la curva (Cocloide).

15 Representar gráficamente la curva $\rho = 1 + b \operatorname{sen}\theta$. O en implícitas: $(x^2 + y^2)^3 = ((b+1)x^2 - (b-1)y^2)^2$.

Para $b = 2$, tenemos:

Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia con centro en O. Trazar una recta por O que corta a $\mathcal{C}$ en P. Sea un punto Q sobre el eje de abscisas tal que $OP = PQ$.

La trisectriz de Ceva es el lugar geométrico de los puntos M tales que: M está en OP y $MP = PQ$.

Se verifica además que $\widehat{OQM} = 3\widehat{QOM}$. / Applet CabriJava

16 Representar gráficamente la curva $\rho = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \operatorname{tag}\theta$. (Ver también)

17 Un punto M se mueve sobre una circunferencia fija y Q es su proyección sobre una recta fija. Lugar geométrico del punto P, proyección de Q sobre el diámetro OM. / Applet CabriJava

18 Dada una circunferencia Γ de centro O, se considera sobre ella un punto A. Sea Γ_B una circunferencia variable de centro en B, sobre Γ, y pasando por A. Sobre Γ_B se toma un punto C en la paralela por B a OA. Finalmente, se traza la circunferencia variable Γ_C de centro C y pasando por O. Se pide el lugar geométrico de los puntos de intersección de las circunferencias Γ_B y Γ_C. (Mariposa de Antero Ferreira Neves.) / Applet CabriJava

19 Representar gráficamente la curva $y^2(a^2 - x^2) = (x^2 + 2ay - a)^2$. (Bicornio o Sombrero de tres picos) (⟳)

20 Dadas dos circunferencias Γ_1 y Γ_2, tales que Γ_2 pasa por el centro de Γ_1, sea P_1 un punto sobre Γ_1 y P_2 el otro punto (distinto de del centro de Γ_1) donde la recta que une P_1 con el centro de Γ_1 corta a Γ_2 y designemos por P el punto medio del segmento P_1P_2. Encontar el lugar geométrico de P cuando P_1 varía sobre Γ_1. / Applet CabriJava

21 Sea M un punto sobre una circunferencia de centro en O, y sea A un punto sobre la recta OM, con $OA > OM$. Sean P y P' los puntos donde las tangentes desde A intersecan a la circunferencia y sean T y T' los puntos que dividen a los segmentos AP y AP' en una razón dada. Encontrar el lugar geométrico que describen T y T', cuando A varía. / Applet CabriJava

22 Representar gráficamente la Concoide de *de Sluze* dada implícitamente, paramétricamente o en coordenadas polares, por las siguientes ecuaciones:

$$(x-1)(x^2+y^2) = ax^2,$$
$$x = \frac{1+a+t^2}{1+t^2}, \qquad y = \frac{t(1+a+t^2)}{1+t^2},$$
$$\rho = a\cos\theta + \frac{1}{\cos\theta}.$$

Nota.- Cada una de estas curvas es el lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas que pasan por el origen y son perpendiculares las tangentes a una cierta parábola de eje OX $(y^2 + 4x - 4a - 4 = 0)$.

/ Applet CabriJava

23 Dado un triángulo rectángulo isósceles $\widehat{ABC}$, sea M el punto medio de la hipotenusa BC. Tomemos un punto D y sea E la intersección de las rectas D y AM. Determinar la localización de D para que $MD + DE = CE$.