Ejemplos de semejanzas en el plano euclídeo

La transformación en el plano siguiente es una semejanza directa de razón $k = 5$:

$$x' = 3x + 4y + 5$$
$$y' = -4x + 3y - 2$$

Los puntos fijos los encontramos resolviendo el sistema:

$$\lambda \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

Los valores de λ que hace que este sistema tenga solución, son los que anulan al determinante:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & 3-\lambda & 4 \\ -2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 6\lambda + 25\right) = 0.$$

El único valor real que se obtiene es $\lambda_1 = 1$, por lo que existe un único punto fijo (como ocurre con cualquier semejanza directa). Este punto fijo se obtiene resolviendo las ecuaciones (2), para $\lambda = \lambda_1 = 1$, obteniéndos el punto $C\left(-\frac{9}{10}, -\frac{4}{5}\right)$.

La semejanza se puede poner como composición de la homotecia de centro C y razón $k = 5$ y el giro de centro en C y ángulo $\theta = \arccos(3/5) \simeq 306.87°$.

La transformación siguiente, en el plano eucl1ídeo, es una semejanza inversa de razón $k = \sqrt{|-25|} = 5$:

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 4y + 5 \\ y' &= 4x - 3y - 2 \end{aligned}$$

Los puntos fijos los encontramos resolviendo el sistema:

$$\lambda \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} \tag{2}$$

Los valores de λ que hace que este sistema tenga solución, son los que anulan al determinante:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & 3-\lambda & 4 \\ -2 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-5)(\lambda-1)(\lambda+5) = 0.$$

Se obtiene tres valores distintos, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$ y $\lambda_3 = -5$, a los que corresponden tres puntos fijos que se obtienen resolviendo las ecuaciones (2), para λ igual a cada uno de estos valores, obteniéndose los puntos:

$$C\left(-\frac{1}{2}, -1\right) \text{ y los puntos del infinito } P(0:10:5),\ Q(0:5:-10).$$

Existe un único punto C propio (como en toda semejanza inversa), y dos recta fijas o dobles $CP: 2x - 4y - 3 = 0$ y $CQ: 2x + y + 2 = 0$.

La semejanza se puede poner como composición de la homotecia de centro C y razón $k = 5$ y la simetría axial respecto a la recta CP; o bien, como composición de la homotecia de centro C y razón $k = -5$ y la simetría axial respecto a la recta CQ.