Superficies regladas

Angel Montesdeoca

Lunes 12 de Mayo del 2008

1 Determínese la curvatura de Gauss de las superficies desarrollables superficie desarrollable (conos, cilindros y supeficies tangenciales).

2 Sea $\vec{\alpha}$ una curva regular en una superficie $\mathcal{M} \subset I\!\!R^3$, y sea $\vec{\mathbf{N}}$ la normal unitaria a $\mathcal{M}$ a lo largo de $\vec{\alpha}$. Demostrar que $\vec{\alpha}$ es línea de curvatura en $\mathcal{M}$ si y sólo si la superficie reglada $\vec{\mathbf{x}}(u,v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{\mathbf{N}}(u)$ es llana (de curvatura de Gauss nula).

3 Hallar la representación paramétrica de la superficie de las binormales a una curva y estudiar si es desarrollable.

4 Hallar las superficies desarrollables generadas por las rectas que se apoyan en la parábola $y^2 = 4x, \ z = 0$ y forman con el eje OZ un ángulo de $45°$.

5 Hallar la ecuación de un conoide (superficie generada por rectas perpendiculares a un eje fijo (eje) que se apoyan sobre una curva (directriz)) cuyo eje coincide con el eje OZ y la directriz es la recta $x = at + 1, \ y = bt, \ z = ct$. Determinar la línea de estricción de la superficie y probar que está contenida en un plano.

6 Hallar la arista de retroceso de la superficie desarrollable generada por las rectas

$$x = 3t^2z - 2t^3 - 3t^2, \qquad y = 4tz - 2t^2 - 4t - 1.$$

7 Hallar las generatrices rectilíneas de las superficies:

$$x = uv + \cos v, \quad y = u\,\cos v + \operatorname{sen} v, \quad z = u\,\cos v + v.$$

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 6yz + 4y - 1 = 0.$$

8 Demostrar que la superficie reglada generada por las binormales de una curva de torsión no nula tiene dicha curva $\mathcal{C}$ como línea de estricción. En un punto P de $\mathcal{C}$, el plano central es el plano rectificante de $\mathcal{C}$. La normal a la superficie es la normal principal de la curva $\mathcal{C}$. El parámetro de distribución es τ.

9 Determinar la superficie reglada cuyas generatrices rectilíneas vienen dadas por las ecuaciones $y = tx+2t+1, \ z = (t-1)x - 3t$, y calcular el plano tangente a la superficie en un punto P_0 de la generatriz t_0.

10 Determinar la función f para que la superficie reglada de ecuaciones

$$x = tz + f(t), \qquad y = f(t)z + t^3/3$$

sea desarrollable. Calcular la arista de retroceso.

11 Hallar la línea de estricción de la superficie engendrada al girar la recta: $y = z, \ x = 1$ alrededor del eje OZ.

12 Ecuación de la arista de retroceso de la superficie desarrollable cuyas generatrices se apoyan en las curvas

a) $x = 0, \ z^2 = 4y$; b) $x = 1, \ y^2 = 4z$.

13 Establecer que la superficie reglada engendrada por las rectas

$$x = t^2z + t^3 \qquad y = 2tz + \frac{3}{2}t^2$$

es desarrollable y hallar la arista de retroceso.

14 Establecer que la superficie reglada de generatrices

$$x = a(\lambda)z + h(\lambda) \qquad y = b(\lambda)z + k(\lambda)$$

es desarrollable si $a'k' - b'h' = 0$.

15 Dada la superficie reglada $x = tu + t^2, y = t^2u + t, z = u$. Determinar: plano tangente, plano asintótico, plano central, punto central, línea de estricción y parámetro de distribución.

16 Hallar la línea de estricción de la superficie $x^2 + y^2 - 4z^2 - 1 = 0$.

17 Dada la superficie $(x - 2z)^2 - y^2z = 0$, hallar la proyección sobre $z = 0$ de la línea de estricción.

18 La superficie $x = u^2 + 2uv, \quad y = u + v, \quad z = u^3 + 3u^2v$ es reglada. Estudiar si es desarrollable.

19 Demostrar que si todos los planos tangentes a una superficie pasan por un punto fijo, entonces se trata de una superficie cónica.

20 Si todos los planos tangentes a una superficie son paralelos a una recta entonces es una superficie cilíndrica.

21 Demostrar que las normales en los puntos de una recta generatriz de una superficie cilíndrica son paralelas.

22 Hallar la ecuación de la superficie engendrada por las tangentes a la hélice circular. Demostrar que las normales a esta superficie forman un ángulo constante con el eje OZ.

23 Para una superficie reglada obtener su primera y segunda forma fundamental cuando se toma como directriz su línea de estricción.

Demostrar que la curvatura de Gauss es la misma en dos puntos de la generatriz que son equidistantes del punto central.

24 Probar que en una superficie reglada la curvatura de Gauss es $K \geq 0$. Y que una superficie reglada es desarrollable si y sólo si $K = 0$.

25 Sea $\mathcal{C}$ la curva $\vec{\alpha}(t) = (t, t^2, t^3)$; el plano osculador en un punto P de la curva $\mathcal{C}$ corta al eje OZ en Q. Determinar las líneas asintóticas de la superficie engendrada por las rectas PQ al variar P en $\mathcal{C}$. Hallar la línea de estricción de dicha superficie.

26 Sea $\mathcal{C}^*$ una curva parametrizada por el parámetro arco $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$, de curvatura y torsión no nulas. Determinar la función $\lambda = \lambda(s)$ para que la superficie reglada $\vec{\mathbf{x}}(s, v) = \alpha(s) + \lambda(s)\vec{n}(s) + v\vec{b}(s)$ sea desarrollable, siendo $\vec{n}$ y $\vec{b}$ la normal principal y binormal respectivamente de la curva $\mathcal{C}$.

27 Consideremos la superficie $\mathcal{M}$ es ecuación $z = 3xy - 2x^3$.

(a) Determinar sus líneas asintóticas.

(b) Parametrizar la superficie tomando como nuevas líneas de coordenadas sus líneas asintóticas.

(c) Comprobar que la línea de estricción de la superficie dada no es una línea geodésica (↺)

28 Sobre la superficie tangente a una curva $\vec{\alpha}$ (superficie lugar de las rectas tangentes a la curva $\vec{\alpha}$) $\vec{\mathbf{x}}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{t}(s)$, se considera una curva arbitraria $\vec{\beta}(s) = \alpha(s) + v(s)\vec{t}(s)$.

Establecer que para que la curva $\vec{\beta}$ sea una trayectoria ortogonal de las tangentes a $\vec{\alpha}$ (sus respectivas tangentes formen un ángulo de 90°) se debe verificar que $v(s) = -s + c$.

Demostrar que todas las curvas $\vec{\beta}$ son líneas de curvatura en la superficie tangente.

Obtener la parametrización de la superficie cuyas líneas coordenadas sean las curvas $\vec{\beta}$ y las rectas tangentes a $\vec{\alpha}$ (las otras líneas de curvatura).

Comprobar que la superficie envolvente de los planos rectificantes de $\vec{\alpha}$ ("superficie rectificante") coincide con la superficie envolvente de los planos normales ("superfie polar") a una cualquiera de las curvas $\vec{\beta}$.

29 Consideremos la superficie reglada $\mathcal{M}$ engendrada por las rectas que cortan a una curva $\mathcal{C}$ según un ángulo constante y que se encuentran en el plano rectificante. Demostrar que la línea de estricción de $\mathcal{M}$ es $\mathcal{C}$.

30 Sea $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ una curva regular de torsión no nula y $\vec{\beta} = \vec{\beta}(t)$ la curva de intersección de las tangentes a $\vec{\alpha}$ con su plano osculador en el punto $t = t_0$.

A) Obtener la ecuación de la superficie reglada cuya directriz es la curva $\vec{\beta}$ y sus generatrices las rectas tangentes a $\vec{\alpha}$. Como dicha superficie es desarrollable compruébese, a partir de dicha ecuación, que la arista de retroceso es la curva $\vec{\alpha}$.

B) La curva $\vec{\beta}$ es geodésica en en tal superficie reglada si y sólo si $\vec{\alpha}'(t) = \vec{\beta}''(t)$.

31 Sea $\mathcal{C}$ una curva contenida en un plano Π y r_P una recta perpendicular a $\mathcal{C}$ en P y que forma un ángulo θ con la dirección del plano Π.

Probar que cuando P describe la curva $\mathcal{C}$, r_P engendra una superficie desarrollable $\mathcal{M}$.

Encontrar la arista de retroceso de $\mathcal{M}$, y comprobar que se reduce a un punto cuando la curva $\mathcal{C}$ es una circunferencia, es decir, en este caso $\mathcal{M}$ es un cono.

32 Hallar la superficie reglada generada por la familia de rectas:

$$kx + 2ky - 4 = 0, \quad x - 2y - k = 0.$$

33 S es una superficie generada por la rotación de un segmento AB alrededor del eje z, con $A(2, -1, 0)$ y $B(1, 2, 3)$. Hallar el volumen del sólido encerrado por $S, z = 0$, y $z = 3$.

34 ¿Cuánto vale la curvatura normal en un punto y en la dirección de una recta que pase por él y esté contenida en la superficie.

Demostrar que si por cierto punto de una superficie pasa una recta, contenida en la superficie, entonces la curvatura de Gauss en ese punto es $K \leq 0$. (↺) (↺)