Una interpretación geométrica del producto baricéntrico del centro y el perspector de una cónica circunscrita a un triángulo

Angel Montesdeoca

Se obtiene el producto baricéntrico $\big(p^2(q+r-p) : q^2(r+p-q) : r^2(p+q-r)\big)$ del centro $\big(p(q+r-p) : q(r+p-q) : r(p+q-r)\big)$ y perspector $P(p : q : r)$ de la cónica circunscrita, $pyz + qzx + rxy = 0$, a una triángulo $\widehat{ABC}$, como centro de homotecia entre $\widehat{ABC}$ y un triángulo que denominamos h_P–triángulo asociado a $\widehat{ABC}$. Cuando la cónica es parábola dicho producto baricéntrico es la tercera potencia baricéntrica de su punto del infinito.

⊛ *Centro de una cónica circunscrita a un triángulo*

La ecuación baricéntrica de una cónica $\mathcal{C}$ circunscrita al triángulo de referencia $\widehat{ABC}$ es

$$pyz + qzx + rxy = 0.$$

Las tangentes en los vértices A, B y C a $\mathcal{C}$ son, respectivamente:

$$ry + qz = 0, \qquad rx + pz = 0, \qquad qx + py = 0.$$

Estas tres rectas determinan un triángulo, con vértices en

$$(-p : q : r), \qquad (p : -q : r), \qquad (p : q : -r), \tag{1}$$

perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad en el punto $P(p : q : r)$, que recibe el nombre de perspector de la cónica circunscrita $\mathcal{C}$.

El centro de $\mathcal{C}$, polo de la recta del infinito $x+y+z = 0$, es $(p(-p+q+r) : q(p-q+r) : r(p+q-r))$. Este punto es centro de perspectividad del triángulo ceviano del baricentro G (triángulo medial) y el triángulo preceviano (1) de P (cada vértice es el conjugado armónico del pie de cada ceviana de P, respecto de los vértices de $\widehat{ABC}$ de la dlado que lo contiene), que se conoce como cociente ceviano de G y P y se denota por G/P.

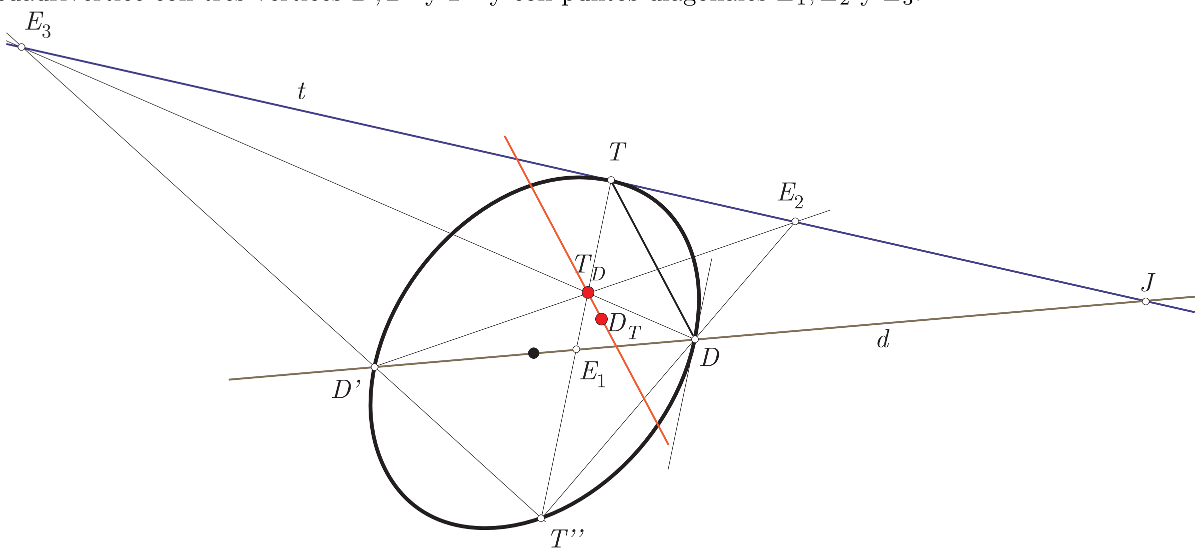
El centro está en el infinito (la cónica circunscrita es un parábola) si P está sobre la elipse inscrita de Steiner, $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = 0$.

⊛ ***Punto asociado a un diámetro y a una tangente a una cónica***

Dadas, en una cónica, una tangente t en un punto T y un diámetro d por un punto D de ella, sean T'' el otro punto en que la polar de $J = t \cap d$ (paralela por T a la tangente en D), vuelve a cortar a la cónica y E_1 el punto de intersección de diámetro y polar.

Denotamos por T_D el conjugado armónico de T'' respecto a T y E_1, al que denominaremos $(T, D)-$punto asociado a la tangente por T y al diámetro por D de la cónica.

El punto T_D puede ser construido usando la construcción usual del cuarto armónico, o bien, considerando los puntos $E_2 = t \cap DT''$, $E_3 = t \cap D'T''$ (siendo D' el simétrico de D respecto al centro de la cónica, en caso de tenerlo; si es parábola D' es su punto del infinito). Entonces, $T_D = D'E_2 \cap DE_3$, que está en TT'' (polar de J), pues $(J\,E_3\,D\,D') = (J\,T\,E_1\,E_2) = -1$; es decir, T_D es el cuarto vértice del cuadrivértice con tres vértices D, D' y T'' y con puntos diagonales E_1, E_2 y E_3.

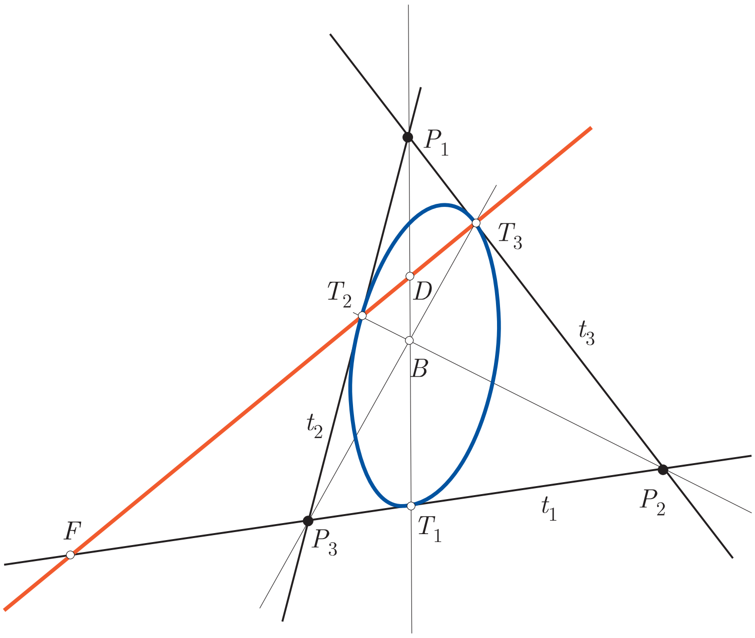


Si ahora tomamos la tangente en D y el diámetro por T, se obtiene el punto D_T, situado en la polar del punto de intersección la tangente y el diámetro considerados. Se tiene que la recta $T_D D_T$ es paralela a TD (ver párrafo "*Producto baricéntrico del perspector y centro de una cónica circunscrita*").

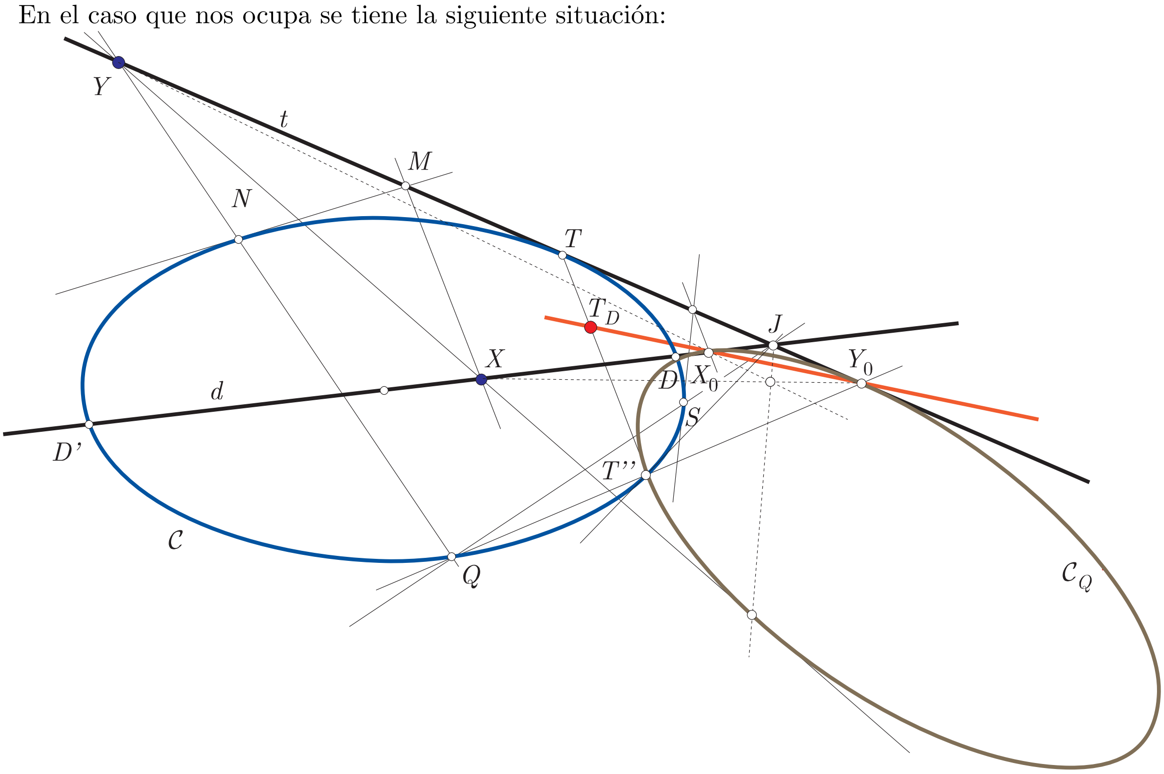
Otra interpretación geométrica del punto T_D la podemos dar en términos de un tipo de series de cónicas (haces tangenciales): "cónicas tangentes en un punto a una recta y tangentes a otras dos rectas distintas".

Ocurre, entonces, que la rectas que une los puntos de tangencia de cada cónica de este haz con las segundas tangentes, pasan por un punto fijo; éste es el conjugado armónico del punto de tangencia de todas las cónicas con la primera tangente, respecto a los puntos en que esta tangente encuentra a las dos últimas.

En efecto, por el teorema de Brianchon, aplicado a triángulo $\widehat{P_1P_2P_3}$ circunscrito a las cónicas del haz, las rectas que unen cada vértices con el punto de contacto del lado opuesto concurren en un punto B. Tenemos entonces un cuadrivértice $P_1T_2BT_3$ en el que los puntos diagonales P_2 y P_3, están armónicamente separados de los puntos F y T_1, en los que lados que pasan por el otro punto diagonal, D, cortan a la recta que los contiene.



En el caso que nos ocupa se tiene la siguiente situación:



Sea Q un punto sobre la cónica $\mathcal{C}$ considerada en dicho párrafo. Por un punto X del diámetro d

trazamos la paralela a la tangente en D, la cual corta a la tangente t en M. Sea N el punto de tangencia de la otra tangente trazada desde M a $\mathcal{C}$. La recta QN corta a t en Y; entonces, las rectas XY (cuando X varía en d) son tangentes a una cónica $\mathcal{C}_Q$ que es tangente a d y a t.

Los puntos de tangencia con las rectas t y d se determinan como sigue:
— Si $J = d \cap t$, la recta JQ, vuelve a cortar a $\mathcal{C}$ en S y la paralela al diámetro d' por el punto de intersección de las tangentes en T y S, corta a d en su punto X_0, de tangencia con $\mathcal{C}_Q$.
— La recta QT'' corta a t en Y_0, punto de tangencia con $\mathcal{C}_Q$.

Los puntos X_0 e Y_0 se obtienen a partir del punto $J = t \cap d$, en la proyectividad $X \in d \mapsto Y \in t$: se tiene que $J \in d \mapsto Y_0 \in t$ y $X_0 \in d \mapsto J \in t$.

El punto de tangencia de la recta XY con $\mathcal{C}_Q$ se puede determinar utilizando una situación límite del teorema de Brianchon relativa al triángulo $\widehat{JXY}$ circunscrito a la cónica $\mathcal{C}_Q$, por el que se tiene que las rectas que unen cada vértice con el punto de tangencia del lado opuesto, son concurrentes. Así, conociendo los puntos de tangencia X_0 e Y_0 de las rectas t y d podemos de terminar el punto $YX_0 \cap XY_0$, que unido con J, da una recta que corta a XY en su punto de tangencia con la cónica $\mathcal{C}_Q$.

En particular, obtenemos que que el punto de tangencia de $\mathcal{C}_Q$ con la recta TT'' es T'', para cualquier Q; por lo que todas ellas forman un haz de cónicas con el punto T'' fijo y tangentes a las rectas t y d.
Así, cuando el punto Q varía en $\mathcal{C}$ la recta que une los puntos de tangencia de d y t con las cónicas $\mathcal{C}_Q$ pasan por un punto fijo: T_D.

△
▽

⊛ ***Producto baricéntrico del perspector y centro de una cónica circunscrita***

Sea $\mathcal{C}$ la cónica, circunscrita al triángulo de referencia $\widehat{ABC}$, de perspector $P(p:q:r)$.
Consideremos el diámetro por B y la tangente en C, por la construcción del párrafo "*Punto asociado a un diámetro y a una tangente a una cónica*", obtenemos los puntos C_B y B_C, asociados a los diámetros y tangentes en B y C. Las coordenadas de estos puntos las podemos obtener como sigue:
La paralela $(p-r)x+py=0$ por C a la tangente a $\mathcal{C}$ en B, vuelve a cortar a $\mathcal{C}$ en $C''(p(-p+q+r):(p-r)(p-q-r):(p-r)r)$. La recta que une el punto $B'(2p(-p+q+r):(p-q-r)(p+q-r):2(p+q-r)r)$ (simétrico de B, respecto al centro) con el punto $E_2(p(-p+q+r):-q(-p+q+r):r(p-r))$ (intersección de la tangente en C con BC''), corta a CC'' en

$$C_B\big(p(-p+q+r):(p-r)(p-q-r):r(p+2q-r)\big).$$

Cálculos similares, nos permiten obtener que

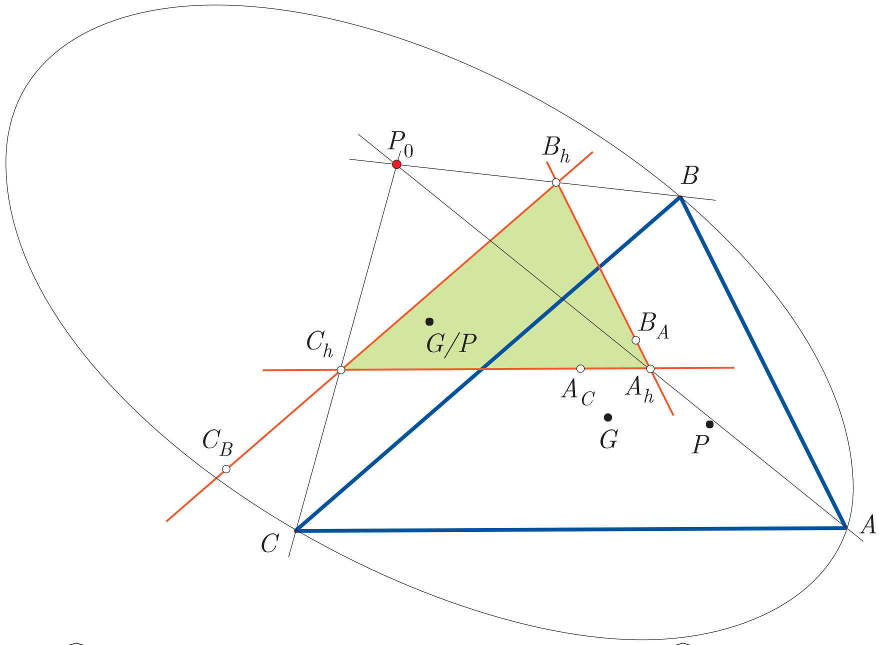
$$B_C\big(p(-p+q+r):q(p-q+2r):(p-q)(p-q-r)\big).$$

La recta B_CC_B, $(-p^2-3qr+pq+pr))x+p(-p+q+r)y+p(-p+q+r)z=0$, que tiene punto del infinito $(0:1:-1)$, es paralela al lado BC.

Procediendo cíclicamente, obtenemos las rectas C_AA_C y A_BB_A; estas tres rectas se cortan dos a dos en los puntos

$$A_h\left(q^3+r^3-pr^2-pq^2-rq^2-qr^2+3pqr:q^2(p-q+r):r^2(p+q-r)\right),$$

$$B_h\left(p^2(-p+q+r):r^3+p^3-qp^2-qr^2-pr^2-rp^2+3pqr:r^2(p+q-r)\right),$$
$$C_h\left(p^2(-p+q+r):q^2(p-q+r):p^3+q^3-rq^2-rp^2-qp^2-pq^2+3pqr\right).$$



Al triángulo $\widehat{A_hB_hC_h}$ le denominaremos h_P–triángulo asociado a $\widehat{ABC}$. El centro de la homotecia que transforma el triángulo $\widehat{ABC}$ en el $\widehat{A_hB_hC_h}$ es, entonces,

$$\boxed{P_0\left(p^2(q+r-p):q^2(r+p-q):r^2(p+q-r)\right),}$$

que es el producto baricéntrico[(1)] del perspector y centro de la cónica $\mathcal{C}$.

La razón de homotecia, $k = P_0A_h/P_0A$, es:

$$k=\frac{p^3+q^3+r^3-qp^2-rp^2-q^2p-r^2p-qr^2-q^2r+3pqr}{3pqr}.$$

Cuando la cónica circunscrita es parábola, su perspector $P(p:q:r)$ está en la elipse inscrita de Steiner $(p^2+q^2+r^2-2qr-2rp-2pq=0)$ o, equivalentemente, su centro $\left(p(q+r-p):q(r+p-q):r(p+q-r)\right)$ está en la recta del infinito. Entonces, la triple potencia baricéntrica de su centro:

$$\left(p^3(q+r-p)^3:q^3(r+p-q)^3:r^3(p+q-r)^3\right),$$

coincide con el producto baricéntrico de su centro por su perspector:

$$\left(p^2(q+r-p):q^2(r+p-q):r^2(p+q-r)\right),$$

(1) Cuadrado baricéntrico y raíz baricéntrica, http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/baric2.pdf
Paul Yiu.- Introduction to Geometry of the Triangle (pag. 98), http://www.math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.ps

ya que $p(q+r-p)^2 = q(r+p-q)^2 : r(p+q-r)^2 = 2pqr$.

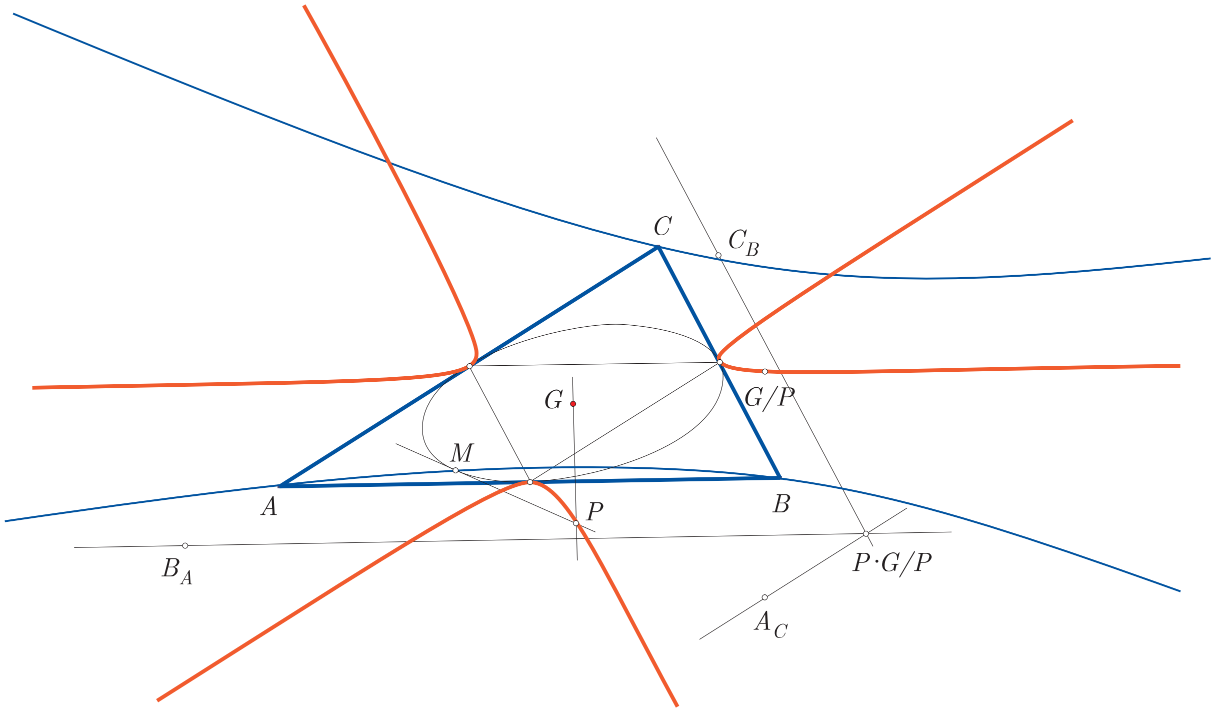
Esto nos da un método para determinar la potencia triple baricéntrica de un punto del infinito, utilizando la parábola circunscrita cuyo eje tiene la dirección dada por dicho punto.

⊛ *Algunas cúbicas*

El h_P–triángulo $\widehat{A_hB_hC_h}$ asociado a $\widehat{ABC}$, obtenido en el párrafo "*Producto baricéntrico del perspector y centro de una cónica circunscrita*", degenera en el punto P_0 cuando el perspector P de la cónica circunscrita a $\widehat{ABC}$ recorre la cúbica

$$x^3 + y^3 + z^3 - yx^2 - zx^2 - y^2x - z^2x - yz^2 - y^2z + 3xyz = 0.$$

En estas circunstancias, esta cúbica también contiene al centro de la cónica circunscrita a $\widehat{ABC}$ de perspector P.



Si referimos esta cúbica al triángulo medial ($x = y' + z'$, $y = z' + x'$, $z = x' + y'$, quitando las primas en el resultado) queda la ecuación:

$$x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) - 6xyz = 0.$$

Se trata de una isocúbica no pivotal (cúbica de Tucker del triángulo medial[(2)]), con punto doble aislado en el baricentro.

Para construir la cúbica de Tucker del triángulo medial, podemos usar la propiedad[(3)] de que es el lugar geométrico del punto P de intersección de una tangente a la cónica circunscrita de Steiner del triángulo medial (cónica inscrita de Steiner de $\widehat{ABC}$) con la polar trilineal, respecto al triángulo medial, del punto de tangencia M.

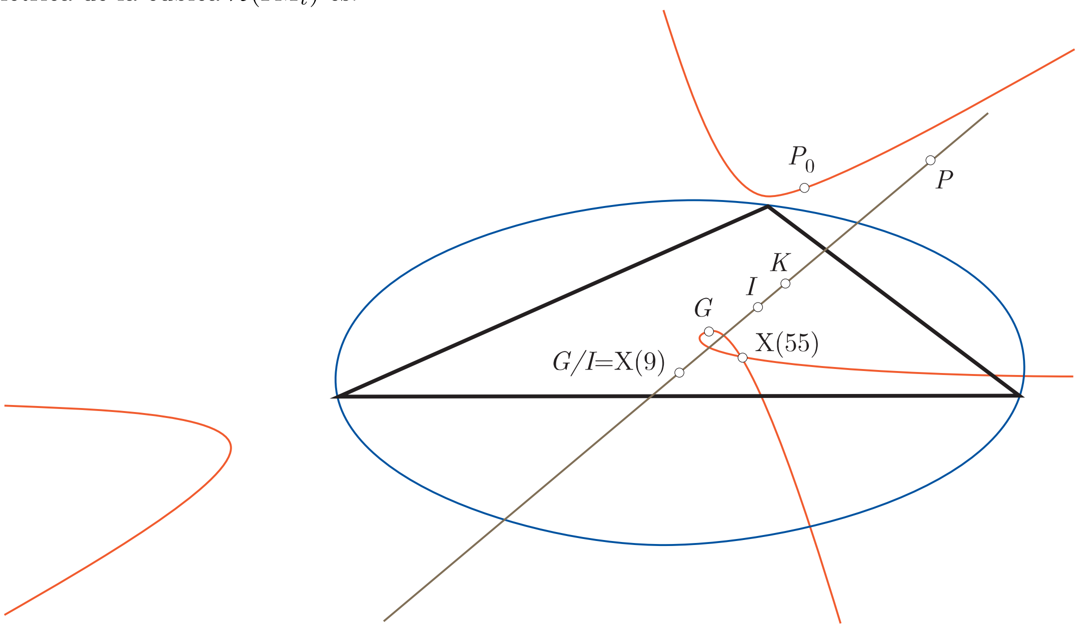
El punto M está en la cónica circunscrita a $\widehat{ABC}$, de perspector P. En efecto, un punto P de la cúbica (que es unicursal, al poseer un punto doble: el baricentro) se puede expresar paramétricamente, en la forma

$$P\left(-(1-2t)^2 : (1-t)(t+1)^2 : t(t-2)^2\right),$$

que es el tercer punto de corte con la recta $(1-2t)x+(1+t)y+(t-2)z=0$, por $G(1:1:1)$. Entonces, $M\left((1-2t)^2 : (t+1)^2 : (t-2)^2\right)$, que está en la cónica circunscrita a $\widehat{ABC}$, de perspector P, $-(1-2t)^2yz+(1-t)(t+1)^2zx+t(t-2)^2xy=0$.

Cuando el perspector de la cónica circunscrita se mueve en una recta ℓ, el producto baricéntrico de él por el centro describe una cúbica $\mathcal{K}(\ell)$, con un punto doble.

Cuando el perspector describe la recta que pasa por el incentro $I(a:b:c)$ y el punto intermedio $M_t(a(b+c-a):b(c+a-b):c(a+b-c))$, el punto doble de la cúbica es el X_{55}, que es el producto baricéntrico de perspector y centro de las cónicas que tienen a esos puntos como perspectores. La ecuación paramétrica de la cúbica $\mathcal{K}(IM_t)$ es:



---

(2) Ver pág. 110 en "Special Isocubics in the Triangle Plane" de Ehrmann-Gibert y en el catálogo de cúbicas de Gibert: http://pagesperso-orange.fr/bernard.gibert/Exemples/k015.html.

(3) Jean-Pierre Ehrmann and Bernard Gibert.- "Special Isocubics in the Triangle Plane", November 16, 2005. pag. 109, http://pagesperso-orange.fr/bernard.gibert/files/isocubics.html

$$
\begin{aligned}
x = a^2\Big(&(b+c-a)(a+b+c) + 2\left(a(b+c) - (b^2+c^2)\right)t\Big)^2\\
&\Big((c+a-b)(a+b-c)(a+b+c) - 4a\left(a(b+c) - (b^2+c^2)\right)t\Big),\\
y = b^2\Big(&(c+a-b)(a+b+c) + 2\left(b(c+a) - (c^2+a^2)\right)t\Big)^2\\
&\Big((a+b-c)(b+c-a)(a+b+c) - 4b\left(b(c+a) - (c^2+a^2)\right)t\Big),\\
z = c^2\Big(&(a+b-c)(a+b+c) + 2\left(c(a+b) - (a^2+b^2)\right)t\Big)^2\\
&\Big((b+c-a)(c+a-b)(a+b+c) - 4c\left(c(a+b) - (a^2+b^2)\right)t\Big).
\end{aligned}
$$

El punto doble es el X_{55}, que se obtiene para $t=0$ y $t=1$, cuando el perspector es el punto intermedio y el incentro, respectivamente:

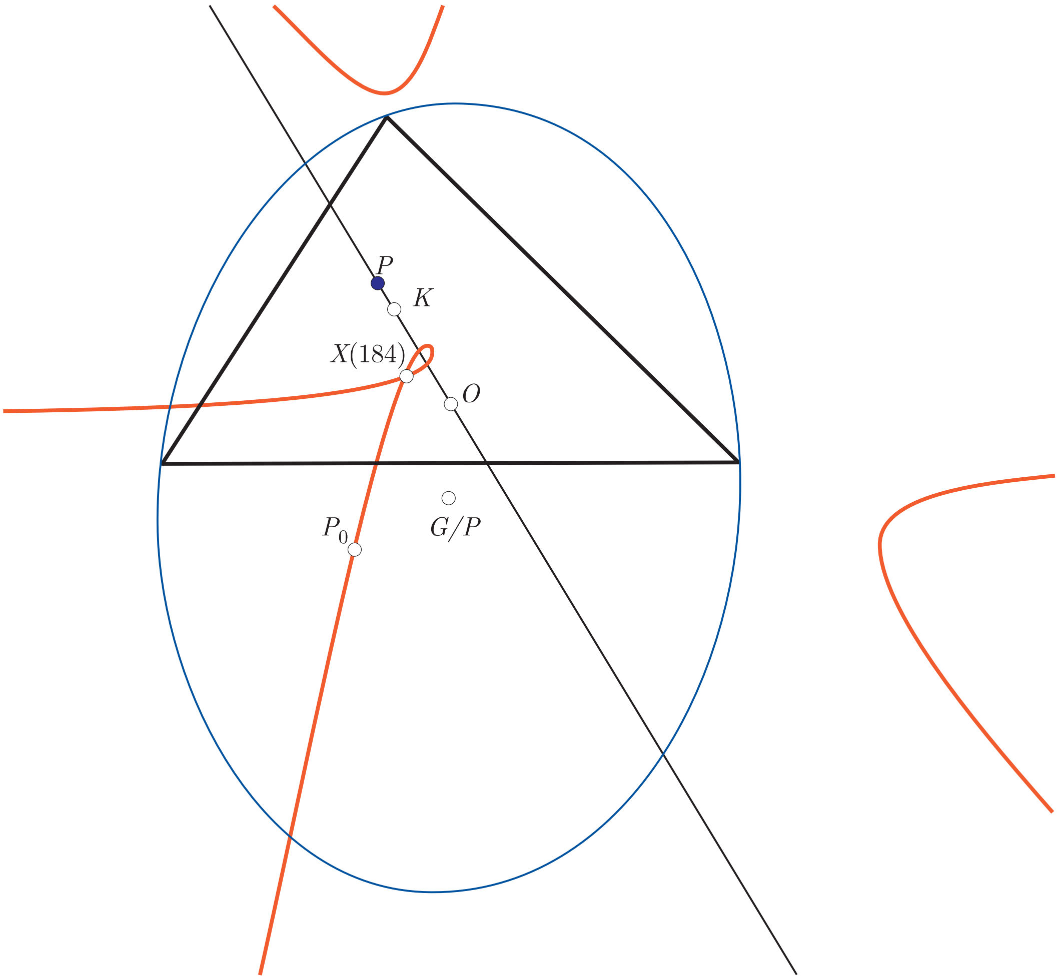
$$\left(a^2(b+c-a) : b^2(c+a-b) : c^2(a+b-c)\right).$$

Si el perspector recorre el eje de Brocard OK(determinado por el circuncentro y simediano), la ecuación de la cúbica $\mathcal{K}(OK)$ es:

$$
\begin{aligned}
x &= a^4\Big(2S^2 - \left(a^2(b^2+c^2) - (b^4+c^4)\right)t\Big)^2\Big(2S^2S_A + a^2\left(a^2(b^2+c^2) - (b^4+c^4)\right)t\Big),\\
y &= b^4\Big(2S^2 - \left(b^2(c^2+a^2) - (c^4+a^4)\right)t\Big)^2\Big(2S^2S_B + b^2\left(b^2(c^2+a^2) - (c^4+a^4)\right)t\Big),\\
z &= c^4\Big(2S^2 - \left(c^2(a^2+b^2) - (a^4+b^4)\right)t\Big)^2\Big(2S^2S_C + c^2\left(c^2(a^2+b^2) - (a^4+b^4)\right)t\Big).
\end{aligned}
$$

El punto doble es el X_{184}, que se obtiene para $t=0$ y $t=1$, cuando el perspector es el simediano y el circuncentro, respectivamente:

$$\left(a^4S_A : b^4S_B : c^4S_C\right) = (a^3\cos A : b^3\cos B : c^3\cos C).$$


P
K
X(184)
O
P0
G/P