Triángulos

Angel Montesdeoca

Domingo, 1 de Octubre del 2017

1 Consideremos las tres cónicas circunscritas a un triángulo $\widehat{ABC}$ y con centros en cada punto medio de los lados. Cada tres tangentes, en los vértices del triángulo, a cada cónica forman triángulos perspectivos con $\widehat{ABC}$. Los tres perspectores P, Q y R, que así se obtienen, forman un triángulo $\widehat{PQR}$ perspectivo con $\widehat{ABC}$, con perspector el ortocentro de $\widehat{ABC}$.

Las tres cónicas se cortan, además de en los vértices A, B y C, en tres puntos que forman un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, con perspector el ortocentro del triángulo anticomplementario de lados paralelos a los de $\widehat{ABC}$ y que pasa por sus vértices. / Applet CabriJava

2 Toda cónica inscrita en un triángulo es la imagen de la circunferencia inscrita mediante una homografía que deja fijo los vértices del triángulo y aplica el punto de Gergonne en un punto arbitrario dado. (El punto de Gergonne, X_8 de ETC, es el de intersección de las rectas que unen cada vértice con el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con el lado opuesto). / Applet CabriJava

3 A toda recta ℓ en el plano del triángulo $\widehat{ABC}$ le corresponde un punto, el ortopolo de ℓ con respecto a $\widehat{ABC}$. Para definir este punto, primero se trazan las perpendiculares AL, BM y CN desde los vértices de $\widehat{ABC}$ sobre ℓ. Desde los tres puntos así obtenidos se trazan las perpendiculares sobre los lados opuestos del triángulo: desde L sobre BC, desde M sobre AC, y desde N sobre AB. Estas tres últimas rectas son concurrentes, y el punto donde ellas se intersecan se conoce como el ortopolo de ℓ con respecto a $\widehat{ABC}$.

El ortopolo de la recta de Euler es el centro (X_{125} de ETC) de la hipérbola de Jerabek (circunscrita al triángulo y que pasa por el circuncentro y ortocentro).

El centro de la elipse, lugar geometrico de los ortopolos de las rectas que pasan por el incentro, es el X_{946} de ETC, punto medio del incentro y ortocentro.

El lugar geométrico de los ortopolos de las rectas que pasan por el baricentro es una elipse que pasa por el centro de la hipérbola de Jerabek y tiene centro en el punto medio (X_{381} de ETC) del baricentro y el ortocentro.

El lugar geométrico de los ortopolos de las rectas que pasan por el circuncentro es la circunferencia de los nueve puntos, que pasa por los puntos medios de los lados.

El lugar geométrico de los ortopolos de las rectas que pasan por el ortocentro es una elipse de centro el ortocentro y que pasa por los pies de las alturas y por el centro de la hipérbola de Jerabek.

El lugar geométrico de las recta que pasa por el centro de la circunferencia de los nueve puntos es una elipse cuyo centro (X_{546} de ETC) es el punto medio del ortocentro y el centro de la circunferencia de nueve puntos. / Applet CabriJava

4 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto P, se denomina triángulo ceviano de P al triángulo $\widehat{A'B'C'}$, siendo A' la intersección de AP con BC, B' la intersección de BP con AC y C' la intersección de CP con AB.

El triángulo anticeviano de $\widehat{ABC}$ con respecto al punto P es un triángulo $\widehat{A^0B^0C^0}$, tal que

— B^0C^0 pasa por A, A^0C^0 pasa por B y A^0B^0 pasa por C.

— AA^0, BB^0, CC^0 pasan por P.

— $\widehat{ABC}$ es el triangulo ceviano de $\widehat{A^0B^0C^0}$ respecto a P.

Demostrar que, si $P(p_1 : p_2 : p_3)$ y $Q(q_1 : q_2 : q_3)$ están dados en coordenadas baricéntricas y $\widehat{A'B'C'}$ es el triángulo ceviano de $\widehat{ABC}$ respecto a P y $\widehat{A^0B^0C^0}$ es el triángulo anticeviano de $\widehat{ABC}$ respecto a Q, entonces las rectas $A'A^0$, $B'B^0$ y $C'C^0$ son concurrentes en el punto

$$\left(q_1\left(-\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\frac{q_3}{p_3}\right) : q_2\left(\frac{q_1}{p_1}-\frac{q_2}{p_2}+\frac{q_3}{p_3}\right) : q_3\left(\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}-\frac{q_3}{p_3}\right)\right).$$

/ Applet CabriJava

5 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, se denota por a, b y c las longitudes de los lados opuestos a los vértices A, B y C, respectivamente. Encontrar gráficamente el punto P de coordenadas baricéntricas $(a : b : c)$, respecto a $\widehat{ABC}$. Demostrar que se trata del incentro. / Applet CabriJava

6 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo y P un punto de su plano. Denotemos por P_a, P_b y P_c, las proyecciones de P desde cada vértice sobre el lado opuesto. Consideremos las rectas simétricas, respecto a las bisectrices en cada vértice, de las rectas AP_a, BP_b y CP_c. Demostrar que tales rectas se cortan en un punto Q, denominado isogonal conjugado de P. / Applet CabriJava

7 Se denomina transformación isogonal respecto a un triángulo $\widehat{ABC}$, a la aplicación que lleva un punto en su isogonal conjugado. (↻)

Demostrar que para cada recta que pasa por los puntos medios de los lados de $\widehat{ABC}$, su transformada isogonal es una cónica circunscrita al triángulo.

Si la recta considera es la paralela a AB, dicha cónica es tangente a la circunferencia circunscrita en C. Análogamente con las otras dos.

Cada par de estas tres cónicas son tangentes entre sí, en cada vértice y en aquellos que no son tangentes a la circunferencia circunscrita, la tangente común es la recta simétrica de la mediana (simediana), respecto a la bisectriz, que parten de tal vértice.

Las rectas que unen cada vértice con el centro de la cónica que es tangente a la circunferencia circunscrita, en tal vértice, son concurrentes. / Applet CabriJava

8 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto P en su plano, cada paralela por P a los lados del triángulo cortan a éstos en en tres pares de puntos, que están en una cónica. Ésta es una circunferencia si $P(a^2 : b^2 : c^2)$, que es simediano o punto de Lemoine. / Applet CabriJava

9 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto P en su plano, una recta r, que pasa por P, corta a sus lados o prolongaciones en los puntos X, Y y Z, Sean los puntos X', Y' y Z' simétricos de los X, Y y Z, respecto a los puntos medios de los lados donde se encuentran. Los puntos X', Y' y Z' están en una recta r', se pide la envolvente de las rectas r', cuando r varía. / Applet CabriJava

10 Determinar los puntos D y E de los lados AB y AC de un triángulo $\widehat{ABC}$ de modo que $BD = DE = EC$. / Applet CabriJava

11 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, tazamos paralelas a sus lados (en el semiplano que contiene al vértice opuesto) a distancias d_a, d_b, d_c tales que

$$\frac{a}{d_a} = \frac{b}{d_b} = \frac{c}{d_c} = k.$$

Estas paralelas se cortan dos a dos sobre rectas que pasan por los vértices (cuando k varía). Estas tres últimas rectas concurren en el simediano, X_6 de ETC. / Applet CabriJava

12 Dada una elipse y un punto P en su plano, se llama hipérbola (equilátera) de Apolonio a la que pasa por los pies de las normales a la elipse trazadas desde P; dicha hipérbola es el lugar geométrico de los puntos de intersección de un diámetro variable de la elipse con la perpendicular a su diámetro conjugado trazada desde P.

Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, la elipse inscrita de Steiner es la que es tangente a los lados en sus puntos medios; su centro es el baricentro del triángulo.

Denotamos por A', B' y C' cada centro de la hipérbola de Apolonio relativa a la elipse de Steiner y a cada vértices A, B y C de $\widehat{ABC}$, respectivamente. Entonces el triángulo $\widehat{A'B'C'}$ es perspectivo de $\widehat{ABC}$ y su perspector es el punto de Tarry (X_{98} de ETC). / Applet CabriJava

13 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, se consideran la cónica $\mathcal{C}$ inscrita con perspector el ortocentro H, un punto M en la circunferencia circunscrita y la hipérbola de Apolonio $\mathcal{H}$ relativa a M y a la cónica $\mathcal{C}$.

El lugar geométrico del centro de dicha hipérbola, cuando M varía, es una elipse cuyo centro coincide con el de la hipérbola de Jerabek (X_{125} de ETC). / Applet CabriJava

14 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ con baricentro G, sea Γ_a la circunferencia circunscrita a $\widehat{BCG}$ y denotamos por B_a y C_a los otros puntos de intersección de Γ_a con AC y AB, respectivamente. Consideremos las circunferencias Γ^*_{ab} y Γ^*_{ac}, circunscritas, respectivamente, a los triángulo $\widehat{ABB_a}$ y $\widehat{ACC_a}$; éstas se cortan, además de en A, en otro punto A'.

Similarmente, se construyen los las circunferencias Γ_b y Γ_c, los puntos A_b, C_b, A_c y B_c y las circunferencias $\Gamma^*_{ba}, \Gamma^*_{bc}, \Gamma^*_{ca}$ y Γ_{cb}. Y se terminan los puntos B' y C'.

Se tiene entonces que los ejes radicales AA', BB' y CC' son paralelos, es decir que los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son perspectivos con centro de perspectividad en el infinito: X_{524} (de ETC), isogonal conjugado del punto de Parry (X_{111}).

15 En un triángulo $\widehat{ABC}$, $I(r)$ es la circunferencia inscrita y M_a, H_a son los pies de la altura y mediana desde el vértice A, respectivamente, sea $T = IM_a \cap AH_a$. Probar que $\overline{AT} = r$.

/ Applet CabriJava

16 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, sea I el incentro y consideremos las tres semirrectas que unen I con los puntos X, Y, Z de contacto de la circunferencia inscrita con los lados. Sea A', B' y C' sobre IX, IY y IZ, respectivamente, tales que $\overline{IA'} = \overline{IB'} = \overline{OC'}$. Entonces las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes. El punto de concurrencia (punto de Kariya) está sobre la la hipérbola de Feuerbach (hipérbola equilátera circunscrita a $\widehat{ABC}$ y que pasa por I).

En particular, cuando A', B' y C' son los simétricos de I respecto a X, Y y Z, respectivamente, el punto de concurrencia en cuestión es el X_{79} de ETC. / Applet CabriJava

17 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto P en su plano, el lugar geométrico de los tripolos de las rectas que pasan por P es una cónica circunscrita a $\widehat{ABC}$ y cuyas tangentes en los vértices son las rectas AA', BB' y CC', siendo A', B' y C' los puntos de corte de la tripolar de P con los lados de $\widehat{ABC}$. / Applet CabriJava

18 Sean $\mathcal{C}$ la cónica inscrita al triángulo $\widehat{ABC}$ con perspector $P(p:q:r)$ (los puntos de tangencia con los lados son los pies $X(0:q:r)$, $Y(p:0:r)$ y $Z(p:q:0)$ de las cevianas de P) y $Q(u:u:w)$ un punto arbitrario.

Demostrar que las coordenadas baricéntricas del segundo punto de intersección A' de $\mathcal{C}$ con XQ son

$$\left(\frac{4u^2}{p} : q\left(\frac{u}{p}+\frac{v}{q}-\frac{w}{r}\right)^2 : r\left(\frac{u}{p}-\frac{v}{q}+\frac{w}{r}\right)^2\right).$$

Similarmente se definen B' y C'. Demostrar que el triángulo $\widehat{A'B'C'}$ es perspectivo don $\widehat{ABC}$ y que el centro de perspectividad (perspector) es

$$\left(\frac{p}{\left(-\frac{u}{p}+\frac{v}{q}+\frac{w}{r}\right)^2} : \frac{q}{\left(-\frac{v}{q}+\frac{w}{r}+\frac{u}{p}\right)^2} : \frac{r}{\left(-\frac{w}{r}+\frac{u}{p}+\frac{v}{q}\right)^2}\right).$$

En particular, si $P = G(1:1:1)$ es el baricentro y $Q = I(a:b:c)$, el centro, $\mathcal{C}$ es la elipse de Steiner

$$x^2 + y^2 + x^2 - 2yz - 2zx - 2xy = 0.$$

El centro de perpectividad pedido es (X_{279} de ETC)

$$\left(\frac{1}{(s-a)^2} : \frac{1}{(s-b)^2} : \frac{1}{(s-c)^2}\right),$$

que es el cuadrado baricéntrico de X_7, punto de Gergonne: punto de intersección de las rectas que unen los vértices de $\widehat{ABC}$ con los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados opuestos.

/ Applet CabriJava

19 Dadas tres puntos A, B y C no alineados y una recta ℓ, existe un único triángulo $\mathcal{T}_a$ con baricentro en A, con dos de sus vértices en la recta ℓ y tal que los lados que pasan por el otro vértice (denotado por $\tilde{A}$) pasan por B y C, respectivamente.

Supongamos que la recta ℓ varía, girando alrededor de uno de sus puntos P, entonces se tienen los siguientes hechos:

(1) El lugar geométrico descrito por el vértice $\tilde{A}$ es una cónica circunscrita a $\widehat{ABC}$.

(2) La cónica pasa por el punto homotético de P en la homotecia de centro A y razón -2.

(3) La tangente a la cónica en A pasa por el punto $\bar{A}$ de corte con el lado BC con el eje de perspectividad de $\widehat{ABC}$ y su triángulo ceviano respecto a P.

(4) Si P está en las rectas AB ó AC la cónica degenera en el producto de dos rectas. / Applet CabriJava

20 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto P en su plano, sea L el tripolo de una recta ℓ por P y $\mathcal{C}_\ell$ la cónica circunscrita a $\widehat{ABC}$ y que pasa por P y L. Denotamos por $\mathcal{C}_P$ la cónica lugar geométrico de los centros de las cónicas $\mathcal{C}_\ell$, cuando ℓ varía.

Entonces, la cónica $\mathcal{C}_P$ pasa por los puntos medios de los lados y por los pies de las cevianas de P y su centro es el complemento del complemento de P, respecto a $\widehat{ABC}$. / Applet CabriJava

21 Por los vértices, A, B, C de un triángulo $\widehat{ABC}$, se trazan tres rectas de igual dirección que reencuentran a la circunferencia circunscrita Γ en A', B' y C'. Sea P un punto de Γ; las rectas PA', PB' y PC' vuelven a encontrar a las rectas BC, CA y AB en A^*, B^* y C^*. Demostrar que estos puntos pertenecen a una misma recta ℓ. ¿Cuál es la dirección de esta recta? / Applet CabriJava

22 Triángulos $\widehat{ABC}$ tales que desde el vértice A se ven los segmentos BM_a, M_aH_a y H_aC bajo un mismo ángulo, siendo M_a y H_a los pies de la mediana y altura desde A, respectivamente.

23 Dado un segmento BC y un punto V_a sobre él, encontrar el lugar geométrico de los vértices A de los triángulos $\widehat{ABC}$ tales que su bisectiz en A pase por V_a.

24 Encontrar un punto P en el interior de un triángulo rectángulo isósceles $\widehat{ABC}$, con el ángulo recto en B, tal que se verifique $PA = AB = BC$ y $\widehat{PCA} = \widehat{PAB}$.

¿Cuánto miden los ángulos del triángulo $\widehat{APC}$? / Applet CabriJava

25 Lugar geométrico del incentro y exincentro relativo a un vértice de un triángulo variable del que se conoce las longitudes de los lados que concurren en dicho vértice. / Applet CabriJava

26 En un triangulo $\widehat{ABC}$, $AC = BC$ se toma un punto P sobre el lado AB tal que $\widehat{ACP} = 30^{\text{o}}$. Además, sea Q un punto, fuera del triángulo, cumpliendo $\widehat{CPQ} = \widehat{CPA} + \widehat{APQ} = 78^{\text{o}}$. Si todos los ángulos de los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{QPB}$, medido en grados, son enteros, determinar los ángulos de los dos triángulos.

27 Establecer que en un triángulo $\widehat{ABC}$, la distancia d del centro de la circunferencia inscrita cuyo radio es r, al centro de la circunscrita cuyo radio es R, está dada por la relación $d^2 = R(R - 2r)$.

28 Construir un triángulo $\widehat{ABC}$ del que se conoce el lado $BC = a = 4$, los radios de las circunferencias inscrita $r = 1$ y de la circunscrita $R = 7$. / Applet CabriJava

29 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, sean V_a, V_b y V_c los pies de las bisectrices internas en los vértices A, B y C, respectivamente.

Sea Q un punto variable en la circunferencia circunscrita Γ a $\widehat{ABC}$, el lugar geométrico del punto de intersección de la recta QV_a con la recta simétrica de AQ, respecto a AV_a, es una hipérbola $\mathcal{H}_a$, circunscrita a $\widehat{ABC}$.

Similarmente, se obtienen las hipérbolas $\mathcal{H}_b$ y $\mathcal{H}_c$, relativas a los vértices B y C.

Si A' es el cuarto punto de intersección de $\mathcal{H}_b$ y $\mathcal{H}_c$ (distinto de A, B, C), B' es el cuatro punto de intersección de $\mathcal{H}_c$ y $\mathcal{H}_a$ y C' es el cuarto punto de intersección de $\mathcal{H}_a$ y $\mathcal{H}_b$, entonces las rectas AA', BB' y CC' concurren en un punto: X_{171} de ETC.

Los centros de las tres hipérbolas forman un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$ de centro de perspectividad el baricentro de éste. / Applet CabriJava

30 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, sean W_a, W_b y W_c los pies de las bisectrices externas en los vértices A, B y C, respectivamente.

Sea Q un punto variable en la circunferencia circunscrita Γ a $\widehat{ABC}$, el lugar geométrico del punto de intersección de la recta QW_a con la recta simétrica de AQ, respecto a AW_a, es una elipse $\mathcal{E}_a$, circunscrita a $\widehat{ABC}$.

Similarmente, se obtienen las elipses $\mathcal{E}_b$ y $\mathcal{E}_c$, relativas a los vértices B y C.

Si A' es el cuarto punto de intersección de $\mathcal{E}_b$ y $\mathcal{E}_c$ (distinto de A, B, C), B' es el cuatro punto de intersección de $\mathcal{E}_c$ y $\mathcal{E}_a$ y C' es el cuarto punto de intersección de $\mathcal{E}_a$ y $\mathcal{E}_b$, entonces las rectas AA', BB' y CC' concurren en un punto: dista 3.7004051153cm del lado de longitud 6cm del tiángulo de lados 6cm, 9cm y 13cm considerado en ETC.

Los centros de las tres elipses consideradas forman un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$ de centro de perpectividad el baricentro de éste.

/ Applet CabriJava

31 El punto impropio de una parábola circunscrita a un triángulo $\widehat{ABC}$, tiene cuadrado baricéntrico el perspector de la parábola; es decir, el centro de perspectividad del triángulo $\widehat{ABC}$ y del formado por las tangentes a la parábola en los vértices de $\widehat{ABC}$. / Applet CabriJava

32 Se consideran las parábolas con vértices en los de un triángulo $\widehat{ABC}$ y foco F común. Cada dos de estas parábolas tienen dos puntos comunes; las tres rectas que estos determinan son cocurrentes en el incentro del triángulo determinando por las tres directrices de las parábolas. / Applet CabriJava

33 Cada una de las tres parábolas con foco en un vértice y directriz el lado opuesto de un triángulo $\widehat{ABC}$, corta a los lados (no a sus prologaciones) que pasan por su foco en sendos puntos. Las rectas que unen cada par de estos puntos forman un triángulo $\widehat{A'B'C'}$ perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad el punto X_{1123} de ETC, de coordenadas baricéntricas

$$(ab + S)(ac + S) : (bc + S)(ba + S) : (ca + S)(cb + S)$$

donde a, b y c son las longitudes de los lados opuestos a los vértices A, B y C, respectivamente, y S es el área del triángulo. / Applet CabriJava

34 Sean $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ las circunferencias de igual radio tangentes entre sí y al lado BC, siendo $\mathcal{D}$ tangente también a AB y $\mathcal{E}$ tangente también a CA, Ambas circunferencias se intersecan en un punto A' que queda en el interior del triángulo $\widehat{ABC}$. Se definen B' y C' de forma similar. Entonces $\widehat{A'B'C'}$ es perspectivo con $\widehat{ABC}$, y el centro de perspectividad es el punto de Paasche, X_{1123} de ETC. / Applet CabriJava

35 Cada una de las tres parábolas con foco en un vértice y directriz el lado opuesto de un triángulo $\widehat{ABC}$, corta a la prolongación de los lados que pasan por su foco en sendos puntos (exteriores al triángulo). Las rectas que unen cada par de estos puntos forman un triángulo $\widehat{A'B'C'}$ perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad el punto X_{1336} de ETC, de coordenadas baricéntricas

$$(ab - S)(ac - S) : (bc - S)(ba - S) : (ca - S)(cb - S)$$

donde a, b y c son las longitudes de los lados opuestos a los vértices A, B y C, respectivamente, y S es el área del triángulo. / Applet CabriJava

36 Lugar geométrico de los puntos de intersección del eje y la directriz de las parábolas inscritas en un triángulo equilátero. / Applet CabriJava

37 En todo triángulo no equilátero el ortocentro H, el baricentro G y el circuncentro O están alineados, y, además, se cumple la relación métrica: $\overrightarrow{HG} = 2\,\overrightarrow{GO}$. La recta que los contiene se conoce como recta de Euler (1707-1783).

/ Applet CabriJava

38 Una recta que pasa por el incentro de un triángulo $\widehat{ABC}$ corta a los lados AB y AC en los puntos D y E, respectivamente. Sea P el punto de intersección de BE y CD. Si X, Y y Z son los respectivos pies de las perpendiculares desde P a BC, CA y AB, demuéstrese que:

$$\frac{1}{PX} = \frac{1}{PY} + \frac{1}{PZ}.$$

/ Applet CabriJava

39 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, sean Γ la circunferencia circunscrita y H el ortocentro. El lugar geométrico de las mediatrices de los segmentos PH, cuando P varía en Γ es una cónica inscrita en $\widehat{ABC}$, conocida como la cónica de MacBeath. El punto medio de PH describe la circunferencia de Euler o de los nueve puntos. / Applet CabriJava

40 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto X sobre el lado BC. Sean X_b y X_c los puntos simétricos de X respecto a los lados AC y AB, respectivamente, X'_b la proyección de X_b desde B sobre el lado AC y X'_c la proyección de X_c desce C sobre el lado AB. Entonces, cuando X varía, las rectas XX'_b pasan por un punto fijo B' y también las rectas XX'_c pasan por un punto fijo C'.

Similarmente, al considerar un punto Y en el lado AC las rectas y las correspondientes rectas YY'_a pasan por un punto fijo A' y las rectas YY'_c pasan por C'.

Y al considerar un punto variable Z sobre el lado AB, las correspondientes rectas ZZ'_a y ZZ'_b pasan por A' y B'.

El triángulo $\widehat{A'B'C'}$ es perspectivo con $\widehat{ABC}$ y el centro de perspectividad es el ortocentro H de éste.

/ Applet CabriJava

41 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo y Γ su circunferencia circunscrita. Consideremos las homologías involutivas σ_a de centro A y eje el lado BC, σ_b de centro B y eje el lado AC y σ_c de centro C y eje el lado AB. Sean las cónicas imágenes de Γ mediante estas homologías: $\mathcal{C}_a = \sigma_a(\Gamma)$, $\mathcal{C}_b = \sigma_b(\Gamma)$, $\mathcal{C}_c = \sigma_c(\Gamma)$. Entonces los centros de estas cónicas forman un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$ con centro de perspectividad en el centro de homotecia de los triángulos órtico y tangencial de $\widehat{ABC}$ (X_{25} de ETC). / Applet CabriJava

42 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, sean Γ su circunferencia circunscrita y $\widehat{A'B'C'}$ el triángulo tangencial, es decir, A' es la intersección de las tangentes en B y C a Γ, y similarmente B' y C'. Denotemos por A^* el punto de tangencia de la circunferencia que pasa por B' y C' y es tangente a Γ. Análogamente, denotamos por B^* y C^* los similares puntos de tangencia con Γ de la circunferencia que pasa por C' y A' y de la que pasa por A' y B'.

Entonces, los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A^*B^*C^*}$ son perspectivos, con centro de perspectividad (X_{25} de ETC) en el centro de homotecia de $\widehat{ABC}$ y su triángulo órtico (con sus vértices en los pies de las alturas de $\widehat{ABC}$). / Applet CabriJava

43 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, sea Γ su circunferencia circunscrita. Consideremos el punto de tangencia A' con Γ de la circunferencia tangente a los lados AB y AC y a Γ, exteriormente. Similarmente, se consideran los puntos B' y C'.

Entonces, los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son perspectivos con centro de perspectividad el centro de homotecia interno (X_{55} de ETC) de las circunferencias inscrita y circunscrita a $\widehat{ABC}$. / Applet CabriJava

44 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, sea Γ su circunferencia circunscrita. Consideremos el punto de tangencia A' con Γ de la circunferencia tangente a los lados AB y AC y a Γ, interiormente. Similarmente, se consideran los puntos B' y C'.

Entonces, los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son perspectivos con centro de perspectividad el centro de homotecia externo (X_{56} de ETC) de las circunferencias inscrita y circunscrita a $\widehat{ABC}$. / Applet CabriJava

45 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, existe una circunferencia Γ_a tangente interiormente a su circunferencia circunscrita Γ y a los lados AB y AC. Designamos, similarmente, por Γ_b y Γ_c, las correspondientes circunferencias, relativas a los vértices B y C, respectvamente.

En la polaridad asociada a la circunferencia Γ, a Γ_a le corresponde una cónica $\mathcal{C}_a$; y designamos por A^* su centro. Similarmente, designamos por B^* y C^* los centros de las cónicas $\mathcal{C}_b$ y $\mathcal{C}_c$, correspondientes a Γ_b y Γ_c. Entonces, los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A^*B^*C^*}$ son perspectivos, con centro de perspectividad el inverso ($X(36)$ en ETC) del incentro de $\widehat{ABC}$, respecto a Γ. / Applet CabriJava

46 Sean un triángulo $\widehat{ABC}$ y Γ su circunferencia circunscrita. Designamos por Γ_a la circunferencia tangente a los lados AB y AC y a Γ exteriormente, por $\mathcal{C}_a$ la cónica polar de Γ_a respecto a Γ, y por A^* su centro. Similarmente, consideramos las cónicas $\mathcal{C}_b$ y $\mathcal{C}_c$ y sean B^* y C^* sus centros respectivos.

Entonces, los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A^*B^*C^*}$ son perspectivos y su centro de perspectividad es el X_{35} de ETC. / Applet CabriJava

47 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, sea Γ su circunferencia circunscrita y Γ_a la circunferencia tangente a los lados AB y AC y a Γ interiormente. Las tangentes a Γ_a desde B y C (distintas de BA y CA) se cortan en el punto A'.

Similarmente, se consideran las circunferencia Γ_b y Γ_c y los puntos B' y C'.

Entonces, los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son perspectivos con centro de perspectividad el centro X_{57} de ETC.

/ Applet CabriJava

48 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, sea Γ su circunferencia circunscrita y Γ_a la circunferencia tangente a los lados AB y AC y a Γ, exteriormente. Denotamos por A' el punto de corte de las tangentes (distintas de BA y CA) desde B y C a Γ_a.

Similarmente, se consideran las circunferencia Γ_b y Γ_c y los puntos B' y C'.

Entonces, los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son perspectivos con centro de perspectividad el MITTENPUNKT, centro X_9 de ETC. / Applet CabriJava

49 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo y denotemos por H su ortocentro, por Γ su circunferencia circunscrita y por $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b$ y $\mathcal{C}_c$ las circunferencias de diámetros respectivos AH, BH y CH.

Tomemos un punto $P \in \Gamma$ y sea $S(P)$ la recta de Steiner relativa a P (determinada por los simétricos de P, respecto a los lados de $\widehat{ABC}$, y que pasa por H). $S(P)$ corta a las circunferencias $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b$ y $\mathcal{C}_c$, además de H, en los puntos A^*, B^* y C^*, respectivamente.

Sean $S_a(P)$ la recta perpendicular a $S(P)$ por el conjugado armónico de B^* y C^* respecto a A^*, $S_b(P)$ la recta perpendicular a $S(P)$ por el conjugado armónico de A^* y C^* respecto a B^*, y $S_c(P)$ la recta perpendicular a $S(P)$ por el conjugado armónico de A^* y B^* respecto a C^*. Entonces la envolvente de las rectas $S_a(P)$, cuando P varía en Γ, es una parábola $\mathcal{P}_a$, inscrita en $\widehat{ABC}$. Análogamente, se tienen las parábolas inscritas $\mathcal{P}_b$ y $\mathcal{P}_c$.

Los focos F_a, F_b y F_c de las parábolas $\mathcal{P}_a$, $\mathcal{P}_b$ y $\mathcal{P}_c$, están en Γ y los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{F_aF_bF_c}$ son perspectivos, con centro de perspectividad en el simediano de $\widehat{ABC}$. / Applet CabriJava

50 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo no rectángulo en A y V un punto situado sobre la recta BC, distinto de los vértices. La paralelas a AC y AB por por V cortan a AB y AC en D y E, respectivamente. La perpendicular a AB por V corta en G a AC. La perpendicular a AC por V corta en F a AB. Además consideramos los puntos de intersección $J = GD \cap VF$ y $K = EF \cap VG$.

a) Demostrar que cada uno de los siguientes enunciados es cierto si y sólo si AV es una de las bisectrices del ángulo A.

DE es paralela a FG.
FG es paralela a JK.
DG, EF y AV son concurrentes.
El triángulo $\widehat{VFG}$ es isósceles.

b) V es el ortocentro de $\widehat{AFG}$. / Applet CabriJava

51 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo y V un punto situado sobre la recta BC. La perpendicular a AB por V corta en A_b a AC. La perpendicular a AC por V corta en A_c a AB. Entonces el lugar geométrico del punto medio M_a de A_bA_c, cuando V varía en el lado BC, es una recta ℓ_a.

Si ahora el punto V se toma en la recta AC, la perpendicular a AB por V corta a BC en B_a y la perpendicular a BC por V corta a AB en B_c. Entonces el lugar geométrico del punto medio M_b de B_aB_c, cuando V varía en el lado AC, es una recta ℓ_b.

Finalmente, si el punto V está en la recta AB, la perpendicular a BC por V corta a AC en C_b y la perpendicular a AC por V corta a BC en C_a. Entonces el lugar geométrico del punto medio M_c de C_aC_b, cuando V varía en el lado AB, es una recta ℓ_c.

Ocurre entonces que las tres rectas ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c determinan un triángulo $\widehat{A'B'C'}$ perspectivo con $\widehat{ABC}$ con centro de perspectividad en el punto de coordenadas baricéntricas

$$\big(S_A^4S_B^4 + S_A^4S_C^4 - S_B^4S_C^4 - 2S_A^4S_B^2S_C^2, \quad S_B^4S_C^4 + S_B^4S_A^4 - S_C^4S_A^4 - 2S_B^4S_C^2S_A^2,$$
$$S_C^4S_A^4 + S_C^4S_B^4 - S_A^4S_B^4 - 2S_C^4S_C^2S_B^2\big)\,.$$

Se trata de un punto denominado "triangle center" en "The Encyclopedia of Triangle Centers (ETC)" de Clark Kimberling[1] / Applet CabriJava

52 Si D, E y F son los puntos medios de los lados BC, CA y AB de un triángulo $\widehat{ABC}$ y, para un punto P, AP, BP y CP intersecan a los lados opuestos en L, M y N, respectivamente, probar que las rectas que unen D, E y F con los puntos medios de AL, BM y CN son concurrentes. / Applet CabriJava

53 Sea un punto P del plano del triángulo $\widehat{ABC}$, distinto de sus vértices, y los paralelogramos $PBLC, PCMA$ y $PANB$, probar que los segmentos AL, BM y CN concurren en un punto que divide a cada uno en dos partes iguales. / Applet CabriJava

54 Sean D, E y F puntos sobre los lados BC, CA y AC de un triángulo $\widehat{ABC}$ tales que

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}.$$

Probar que los baricentros de $\widehat{ABC}$ y $\widehat{DEF}$ coinciden.

Consideremos los paralelogramos $EABL$ y $FASM$, probar que FL y EM son paralelas a la mediana de $\widehat{ABC}$ por A.

Sean D', E' y F' los simétricos de D, E y F, respecto al punto medio de cada lado. Probar que el eje radical de las circunferencias circunscritas a los triángulos $\widehat{DEF}$ y $\widehat{D'E'F'}$ es fijo, cuando D varía en BC. / Applet CabriJava

55 Una recta que corta a los lados BC, CA y AB de un triángulo en los puntos D, E y F, respectivamente, se mueve de tal forma que $\dfrac{ED}{DF} = \dfrac{m}{n}$, probar que la envolvente de dicha recta es una parábola inscrita en $\widehat{ABC}$. / Applet CabriJava

56 Se dan un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto D tal que $ABDC$ es un paralelogramo. Una circunferencia Γ_a pasando por A y con centro en un punto E de la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$, corta a los lados AC y AB en F y G, respectivamente. Encontrar las posiciones de E para que la recta FG pase por D. / Applet CabriJava

57 En un triángulo $\widehat{ABC}$ la bisectriz del ángulo $\widehat{BCA}$ vuelve a cortar a la circunferencia circunscrita en V, corta a la mediatriz de BC en P y a la mediatriz de AC en Q. El punto medio de BC es K y el punto medio de AC es L. Mostrar que los triángulos $\widehat{VPK}$ y $\widehat{VQL}$ tienen la misma área. / Applet CabriJava

58 En un triángulo $\widehat{ABC}$, sean AH_a, BH_b alturas y AV_a, BV_b bisectrices internas, I el incentro y O el circuncentro. Probar que H_a, H_b e I están alineados si y sólo si V_a, V_b y O están alineados. / Applet CabriJava

59 Sean D, E y F puntos sobre los lados BC, CA y AB de un triángulo $\widehat{ABC}$, tales que

$$\frac{BD}{DC} = \frac{p}{p'}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{q}{q'}, \quad \frac{AF}{FB} = \frac{r}{r'}, \qquad \text{con } p + p' = q + q' = r + r' = 1.$$

[1] http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/index.html, que no figura actualmente en ella, pero es el conjugado isogonal de X_{1498}.

Las rectas AD, BE y CF forman un triángulo $\widehat{PQR}$. Probar que las razón entre las áreas de $\widehat{PQR}$ y $\widehat{ABC}$ es

$$\frac{(pqr - p'q'r')^2}{(p + p'q')(q + q'r')(r + r'p')}.$$

/ Applet CabriJava

60 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo no rectángulo y X un punto situado sobre la recta BC. La perpendicular a AB por X corta en A_b a AC. La perpendicular a AC por X corta en A_c a AB. Sea Y un punto de la recta AC, la perpendicular a AB por Y corta a BC en B_a y la perpendicular a BC por Y corta a AB en B_c. Finalmente, para un punto Z en la recta AB, la perpendicular a BC por Z corta a AC en C_b y la perpendicular a AC por Z corta a BC en C_a.

Sean, ahora, $P_a = AX \cap A_bA_c, P_b = AY \cap B_aB_c$ y $P_c = AZ \cap C_aC_b$. Entonces, los puntos P_a, P_b y P_c, cuando X, Y y Z varían en los lados BC, CA y AB, respectivamente, describen tres cúbicas $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b$ y $\mathcal{C}_c$, que contienen a los tres vértices de $\widehat{ABC}$ y tienen un punto doble en A, B y C, respectivamente. Las asíntotas t_a, t_b y t_c de cada una de estas cúbicas determinan un triángulo $\widehat{A'B'C'}$ perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad en el punto X_{264} de coordenadas baricéntricas

$$\Big(b^2c^2(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2), \quad c^2a^2(b^2 + c^2 - a^2)(b^2 - c^2 + a^2), \qquad a^2b^2(c^2 + a^2 - b^2)(c^2 - a^2 + b^2)\Big)$$

conjugado isotómico del circuncentro de $\widehat{ABC}$. / Applet CabriJava

61 Sean un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto P en su plano. El primer punto de la trisección de la ceviana AP es el punto A' que divide al segmento AP_a (P_a, pie de la ceviana) en la razón $1 : 2$, es decir, $AA' : A'P_A = 1 : 2$. Encontrar el lugar geométrico de P para que los tres primeros puntos de trisección de las tres cevianas de P estén alineados. ¿Para qué tales puntos P, la recta que pasa por los tres primeros puntos de trisección pase además por el baricentro de $\widehat{ABC}$? / Applet CabriJava

62 Dados un triángulo $\widehat{ABC}$ y los puntos cualesquiera O, A', B', C' en su plano, entonces, denotando por $\wedge$ el producto exterior, se tiene:

AA', BB', CC' son concurrentes si y sólo si existen tres vectores (no todos nulos) $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ paralelos a AA', BB', CC', respectivamente, tales que $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} = \vec{0}$ y $\overrightarrow{OA} \wedge \vec{\mathbf{u}} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{\mathbf{v}} + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{\mathbf{w}} = \vec{0}$.

63 Sean un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto P en su plano. El punto A' es el que divide al segmento AP_a (P_a, pie de la ceviana) en la razón $2 : 1$, es decir, $AA' : A'P_A = 2 : 1$. Análogamente, B' es el que divide al segmento AP_b y C' es el que divide al segmento AP_c (P_b y P_c son los pies de las cevianas BP y CP).

Encontrar el lugar geométrico de P para que A', B' y C' estén alineados. / Applet CabriJava

64 Las paralelas a los lados de un triángulo $\widehat{ABC}$ por su simediano K, cortan a sus lados en seis puntos cocíclicos (primera circunferencia de Lemoine).

Cada antiparalela por K a un lado, respecto a los otros dos, corta a estos en dos puntos. Los seis puntos así determinados son cocíclicos (segunda circunferencia de Lemoine). / Applet CabriJava

65 La circunferencia inscrita a un triángulo $\widehat{ABC}$ es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F, respectivamente. Sean tres rectas paralelas entre sí que pasan por D, E y F, las cuales cortan a las rectas EF, FD y DE en los puntos A', B' y C', respectivamente. Entonces las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes. Hallar el lugar geométrico del punto de intersección de estas rectas, cuando varían las paralelas. / Applet CabriJava

66 Sea un circunferencia Γ de centro O. Sobre ella se toman dos puntos fijos A y B que son los dos vértices de la base de un triángulo $\widehat{ABC}$ inscrito en Γ. Si un punto P recorre la circunferencia Γ, hallar el lugar geométrico

1) del ortocentro H_p del triángulo $\widehat{ABP}$.

2) del ortocentro H'_p del triángulo $\widehat{A'B'C'}$, siendo A', B' y C' las intersecciones de la circunferencia Γ con las bisectrices internas de los ángulos en A, B y P, respectivamente. / Applet CabriJava

67 En cada lado de un triángulo $\widehat{ABC}$ se toman puntos D, E y F, que son los primeros puntos de trisección de los segmentos BC, CA y AB; las rectas AD, BE y CF determinan un triángulo $\widehat{PQR}$. Entonces la razón entre las áreas de estos triángulos es 7. / Applet CabriJava

68 Sean ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c las antiparalelas por un punto P a los lados BC, CA y AB de un triángulo $\widehat{ABC}$ y $C_a = \ell_a \cap AB, B_a = \ell_a \cap AC$, $A_b = \ell_b \cap BC, C_b = \ell_b \cap BA$, $A_c = \ell_c \cap CB, B_c = \ell_c \cap CA$. ¿Cuál es el lugar geométrico de P para que las áreas de los triángulos $\widehat{A_bB_cC_a}$ y $\widehat{A_cB_aC_b}$ sean iguales?

/ Applet CabriJava

69 Sea una circunferencia Γ de centro O. Sobre ella, se toman dos puntos fijos B y C que son los dos vértices de la base de un triángulo $\widehat{ABC}$ inscrito en Γ. Sea un punto Q variable sobre Γ:

1.- Hallar el lugar geométrico del baricentro G_Q del triángulo $\widehat{BCQ}$.

2.- Se trazan, en $\widehat{BCQ}$ la altura desde el vértice B, que corta al lado CQ en el punto D, y la altura desde el vértice C que corta al lado QB en el punto E. Determinamos un punto P, en la recta DE, tal que $PE/PD = k$. Hallar el lugar geométrico de P. / Applet CabriJava

70 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo y K su simediano (punto de Lemoine). Considérese la homotecia de centro en K y razón k y sean A', B' y C' los puntos homotéticos de A, B y C, respectivamente. Entonces los puntos de corte de las rectas $A'B'$, $B'C'$ y $C'A'$ con los lados de $\widehat{ABC}$ son cocíclicos (circunferencia de Tucker). / Applet CabriJava

71 Sea I el incentro de un triángulo no equilátero $\widehat{ABC}$ y X, Y, Z los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados BC, CA, AB, respectivamente. Probar que el ortocentro de $\widehat{XYZ}$ está en la recta OI, donde O es el circuncentro de $\widehat{ABC}$. / Applet CabriJava

72 Demostrar que la hipérbola de Kierpert (circunscrita al triángulo $\widehat{ABC}$ y que pasa por el baricentro G y ortocentro H) es el lugar geométrico de los puntos cuyas polares trilineales son perpendiculares a la recta de Euler, GH. / Applet CabriJava

73 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo. Sea A' un punto que se mueve en la mediatriz $\mathcal{L}$ del lado BC. Sea B' el punto sobre la mediatriz del lado CA tal que el triángulo $\widehat{CB'A}$ es semejante al $\widehat{BA'C}$, y sea C' el punto sobre la mediatriz del lado AB tal que el triángulo $\widehat{AC'B}$ es semejante al $\widehat{CB'A}$. Las tres rectas AA', BB', CC' concurren en un punto, P. Cuando A' recorre $\mathcal{L}$, el punto P recorre la hipérbola de Kiepert del triángulo $\widehat{ABC}$, circunscrita y que pasa por su baricentro y ortocentro. / Applet CabriJava

74 La circunferencia de los nueve puntos de un triángulo es el lugar geométrico de los centros de las hipérbolas equiláteras circunscritas. / Applet CabriJava

75 Probar que el lugar de los centros de las cónicas circunscritas a un triángulo y que pasan por un punto P es la cónica que pasa por los pies de las cevianas de P y por los puntos medios delos lados. / Applet CabriJava

76 Dado un triángulo, construir un punto P tal que las paralelas por él a los lados delimitan con éstos, segmentos de la misma longitud. / Applet CabriJava

77 Sean un triángulo $\widehat{ABC}$, inscrito en una circunferencia Γ de centro O, y H su ortocentro. El lugar geométrico de los puntos medios de los lados de todos los triángulo inscritos en Γ, con ortocentro H, es la circunferencia de los nueve puntos de $\widehat{ABC}$. / Applet CabriJava

78 Sean H el ortocentro de un triángulo $\widehat{ABC}$ y P un punto de la circunferencia circunscrita. La envolvente de las mediatrices de HP es un cónica inscrita en $\widehat{ABC}$, con focos en H y O (circuncentro) y su centro coincide con el de la circunferencia de nueve puntos. / Applet CabriJava

79 En un triángulo acutángulo $\widehat{ABC}$ el ángulo A vale 60^{o} . Demostrar que una de las bisectrices del ángulo formado por las dos alturas trazadas desde los vértices B y C pasa por el circuncentro del triángulo. / Applet CabriJava

80 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, prolongamos los lados AC hasta B_a y AB hasta C_a, tal que $CB_a = BC_a = a$. Similarmente, se definen los puntos C_b, A_b, A_c y B_c. Si $A' = BB_a \cap CC_a$, $B' = CC_b \cap AA_b$ y $C' = AA_c \cap BB_c$, los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son perspectivos. / Applet CabriJava

81 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, denotamos, respectivamente, por $O(R)$ y $O_0(R_0)$ sus circunferencias circunscrita y de Apolonio (tangente internamente a cada una de las circunferencias exinscritas); sean, además, I el incentro, S el punto de Spieker (centro de la circunferencia inscrita al triángulo medial de $\widehat{ABC}$) y P el centro exterior de semejanza de $O(R)$ y $O_0(R_0)$. Demostrar que P, S e I son colineales y $\dfrac{PI}{PS} = \dfrac{R}{R_0}$. / Applet CabriJava

82 Si el lado a de un triángulo $\widehat{ABC}$ es igual al cociente de la suma de los cuadrados de los otros dos lados por la suma de estos lados, es decir,

$$a = \frac{b^2 + c^2}{b + c},$$

el segmento KI, que une el punto de Lemoine (simediano) al centro del círculo inscrito (incentro), es paralelo a aquel lado e igual a

$$\frac{abc(b - c)}{2s(b^2 + c^2)},$$

siendo s el semiperímetro. / Applet CabriJava

83 En un triángulo $\widehat{ABC}$, sean I el centro de la circunferencia inscrita y D, E y F sus puntos de tangencia con los lados BC, AC y AB, respectivamente. Sea X el otro punto de intersección de la recta AD con la circunferencia inscrita. Si M es el punto medio de EF, demostrar que los cuatro puntos X, I, M y D pertenecen a una misma circunferencia.

Procediendo cíclicamente, sean Y el otro punto de intersección de la recta BE con la circunferencia inscrita, Z el otro punto de intersección de la recta CF con la circunferencia inscrita, N es el punto medio de FD y L es el punto medio de DE, entonces las tres circunferencia IMD, INE y ILF concurren (aparte de en I) en un punto, denominado punto de Fletcher (X_{1323} de ETC). / Applet CabriJava

84 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, denotamos por H_a, H_b y H_c los pies de las alturas desde los vértices A, B y C, respectivamente. Entonces, los pies B_a, C_a, Y_a, Z_a de las perpendiculares desde H_a a AC, AB, BH_b, CH_c están alineados.

Procediendo cíclicamente, ocurre que C_b, A_b, Z_b, X_b, por una parte, y A_c, B_c, X_c, Y_c, por otra, también están alineados.

Las tres rectas así obtenidas, determinan un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad en el simediano de éste. / Applet CabriJava

85 Sea un triángulo $\widehat{ABC}$ y Γ_a, Γ_b y Γ_c las circunferencia de diámetros BC, CA y AB, respectivamente.

Los ejes radicales de Γ_a y cada circunferencia que pasa por A y tiene centro en AB, se cortan en un punto P_{ac}, sobre la altura desde B.

Los ejes radicales de Γ_a y cada circunferencia que pasa por A y tiene centro en AC, se cortan en un punto P_{ab}, sobre la altura desde C.

Similarmente obtenemos, de forma cíclica, los puntos $P_{ba}, P_{bc}, P_{cb}, P_{ca}$. Entonces, los puntos

$$A' = P_{bc}P_{ba} \cap P_{ca}P_{cb}, \qquad B' = P_{ca}P_{cb} \cap P_{ab}P_{ac}, \qquad C' = P_{ab}P_{ac} \cap P_{bc}P_{ba},$$

forman un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad en el perspector de Kiepert $K(\frac{\pi}{2} - \omega)$, ($X_{262}$ de ETC). / Applet CabriJava

86 Consideramos un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto cualquiera P. Sea $\widehat{P_aP_bP_c}$ el triángulo ceviano de P y los baricentros $B_a, C_a, C_b, A_b, A_c, B_c$ de los triángulos $\widehat{PBP_a}$, $\widehat{PCP_a}$, $\widehat{PCP_b}$, $\widehat{PAP_b}$, $\widehat{PAP_c}$, $\widehat{PBP_c}$.

1) Demostrar que los seis baricentros de estos triángulos están en una misma cónica si el punto P está sobre una de las medianas.

2) Construir con regla y compás dos puntos sobre la mediana correspondiente al vértice A para los que la cónica resulta ser una parábola. / Applet CabriJava

87 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo y $\widehat{A'B'C'}$ su triángulo medial; entonces, las tangentes desde los vértices de éste a la circunferencia inscrita a $\widehat{ABC}$, cortan a sus lados opuestos en puntos alineados. / Applet CabriJava

88 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ encontrar el punto X tal que minimiza la suma de distancias $AX + BX + CX$. / Applet CabriJava

89 Dado un punto móvil M sobre la base de un triángulo isósceles $\widehat{ABC}$, se traza por M la paralela a AB que corta a AC en D, y la paralela a AC que corta a AB en E. Demostrar que las mediatrices del segmento DE pasan por un mismo punto, por el cual pasan las circunferencia circunscritas a los triángulo $\widehat{ADE}$. O lo que es lo mismo, hallar la envolvente de las mediatrices del segmento DE. / Applet CabriJava

90 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, por un punto A' en el lado BC se trazan las paralelas a los lados AB y AC que los cortan en A_b y A_c, respectivamente. Entonces:

Las mediatrices de A_bA_c, cuando A' varía, envuelven una parábola, en la que la polar de A pasa por el circuncentro de $\widehat{ABC}$.

La directriz de la parábola es la mediana por A y el foco está en la simediana por A. / Applet CabriJava

91 $\widehat{ABC}$ es un triángulo en el que $BC = 2AB$. Sean D el punto medio de BC, y E el punto medio de BD. Demostrar que AD es la bisectriz del ángulo $\widehat{CAE}$. / Applet CabriJava

92 Sean un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto P en el lado BC.

La recta por P paralela a la simétrica de AB, respecto a BC, corta a AC en B_a.

La recta por P paralela a la simétrica de AC, respecto a BC, corta a AB en C_a.

La envolvente de las recta B_aC_a es una parábola de eje BC; sea V_a su vértice.

Similarmente, cuando P varía en los lados CA y AB, se obtienen parábolas con ejes BC y AC; sean V_b y V_c sus vértices.

Entonces, las rectas AV_a, BV_b y CV_c forman un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad en X_{393} de ETC. / Applet CabriJava

93 Sea P un punto en el lado BC de un triangulo $\widehat{ABC}$.

La paralela por P a AB corta a AC en P_b. La simétrica de esta paralela, respecto a BC, corta a AC en Q_b. La circunferencia circunscrita a $\widehat{PP_bQ_b}$ vuelve a cortar a BC en A_b

El lugar geométrico del punto de intersección de las recta PQ_b y A_bP_b es una recta ℓ_c que pasa por C.

La paralela por P a AC corta a AB en P_c. La simétrica de esta paralela, respecto a BC, corta a AB en Q_c. La circunferencia circunscrita a $\widehat{PP_cQ_c}$ vuelve a cortar a BC en A_c.

El lugar geométrico del punto de intersección de las recta PQ_c y A_cP_c es una recta ℓ_b que pasa por B.

Sea A' el punto de intersección de las rectas ℓ_c y ℓ_b

Similarmente se definen B' y C', cuando P se toma en los otros lados de $\widehat{ABC}$.

Entonces, los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son perspectivos, con centro de perspectividad en el punto X_{184} de ETC. / Applet CabriJava

94 En un triángulo acutángulo $\widehat{ABC}$ sean AE y BF dos alturas, y sea H el ortocentro. La recta simétrica de AE respecto de la bisectriz (interior) del ángulo en A y la recta simétrica de BF respecto de la bisectriz (interior) del ángulo en B se intersecan en un punto O. Las rectas AE y AO cortan por segunda vez a la circunferencia circunscrita al triángulo $\widehat{ABC}$ en los puntos M y N, respectivamente. Sean: P, la intersección de BC con HN; R, la intersección de BC con OM; y S, la intersección de HR con OP. Demostrar que $AHSO$ es un paralelogramo.

/ Applet CabriJava

95 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo e I su incentro. Construir la cónica que pasa por A, B y C siendo tangente en B y C a las bisectrices BI y CI. Demostrar que esta cónica es siempre una hipérbola. Demostrar que la polar trilineal de cualquier punto P sobre ella pasa por el exincentro I_a correspondiente a A, y que si $\widehat{P_aP_bP_c}$ es el triángulo ceviano de P entonces P_b, P_c e I siempre están alineados. / Applet CabriJava

96 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, encontrar las rectas DEF con D sobre la recta BC, E sobre la recta CA, y F sobre la recta AB tal que $BD = CE = AF$.

97 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y P un punto de su plano; llamamos A_P a la proyección ortogonal de P sobre BC, B_P a la proyección ortogonal de P sobre CA y C_P a la proyección ortogonal de P sobre AB. Sea $\mathcal{D}$ el lugar geométrico de los puntos P tales que las rectas AA_P, BB_P, CC_P son concurrentes; se pide:

1. Caracterizar el lugar $\mathcal{D}$ como una curva algebraica de orden n y determinar n.
2. Demostrar que el lugar $\mathcal{D}$ tiene al circuncentro O como centro de simetría.
3. Demostrar que los vértices del triángulo $\widehat{ABC}$ el incentro I, los ex-incentros I_a, I_b, I_c, el circuncentro O y el ortocentro H pertenecen al lugar $\mathcal{D}$.
4. Hallar una ecuación del lugar.
5. Demostrar que si P es un punto del lugar $\mathcal{D}$, entonces P^* el conjugado isogonal de P también es de la curva.
6. Demostrar que si P es un punto del lugar $\mathcal{D}$, todas las rectas PP^* pasan por un punto fijo que se determinará.
7. ¿Cómo cambia el lugar $\mathcal{D}$ en el caso de que $\widehat{ABC}$ sea un triángulo isósceles?

98 Sean un triángulo $\widehat{ABC}$, $\widehat{M_aM_bM_c}$ su triángulo medial y $\widehat{M'_aM'_bM'_c}$ el triángulo medial de éste. Si G es el baricentro de $\widehat{ABC}$, consideremos la homología h_A de centro en A, eje la paralela por G a BC y tal que M_a es el homólogo de M'_a. Análogamente se definen, cíclicamente, las homologías h_B y h_C.

Tomemos un punto arbitrario X en el plano y definimos los puntos $U = h_A(X)$, $Y = h_B(U)$, $Z = h_C(U)$, X' el punto de intersección de la recta GX con la paralela por U a BC, Y' el punto de intersección de la recta GY con la paralela por U a CA y Z' el punto de intersección de la recta GZ con la paralela por U a AB.

Establecer que los siete puntos U, X, Y, Z, X', Y' y Z' están en una misma cónica Γ_a.

Demostrar que para cualquier triángulo $\widehat{A'B'C'}$ tal que A' divide BC en la misma proporción que B' a CA y C' a AB, es perspectivo con $\widehat{X'Y'Z'}$ y su centro de perspectividad está en en la cónica Γ_a. / Applet CabriJava

99 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, la bisectriz exterior del ángulo A corta a las perpendiculares a BC por B y C en los puntos Z y Y, respectivamente. Probar que las rectas BY, CZ y AO son concurrentes, donde O es el circuncentro de $\widehat{ABC}$.

100 El triángulo medial de $\widehat{ABC}$ es perspectivo con el triángulo $\widehat{A'B'C'}$, formados por los otros puntos en que los lados del triángulo anticomplementario del triángulo de contacto interior, vuelven a cortar a la circunferencia inscrita a $\widehat{ABC}$. / Applet CabriJava

101 Sea el triángulo $\widehat{ABC}$ y A_I, B_I, C_I los puntos de contacto de sus lados con su circunferencia inscrita, de centro I. La recta BC corta a la homotética de B_IC_I, mediante la homotecia de centro en el vértice A y razón 2, en el punto A'. La recta AA' corta a B_IC_I en A''. Entonces la recta determinada por los puntos $BA'' \cap AC$ y $CA'' \cap AB$ es tangente a la circunferencia inscrita en el punto de Feuerbach (único punto común de ésta con la circunferencia de los nueve puntos).

(Lo mismo ocurre si procedemos cíclicamente). / Applet CabriJava

102 Consideremos los triángulos (de Kiepert) de $\widehat{ABC}$ siguientes $\widehat{OY_aZ_a}$, $\widehat{X_bOZ_b}$ y $\widehat{X_cY_cO}$, donde O es el circuncentro de $\widehat{ABC}$; Y_a y Z_a son tales que los tres triángulos $\widehat{OBC}$, $\widehat{Y_aCA}$ y $\widehat{Z_aAB}$ son semejantes; X_b y Z_b son tales que los tres triángulos $\widehat{OCA}$, $\widehat{Z_bAB}$ y $\widehat{X_bBC}$ son semejantes; y, finalmente, X_c y Y_c son tales que los tres triángulos $\widehat{OAB}$, $\widehat{X_cBC}$ y $\widehat{Y_cCA}$ son semejantes.

Entonces los seis puntos $Y_a, Z_a, Z_b, X_b, X_c, Y_c$ están en una hipérbola equilátera con centro en N (centro de la circunferencia de los nueve puntos); además, las rectas Y_aZ_a, Z_bX_b y X_cY_c son diámetros de la hipérbola. / Applet CabriJava

103 Sea P un punto en el plano del triángulo $\widehat{ABC}$. Se denota por A' la intersección de la recta AP con la mediatriz de BC y se definen B' y C' de forma similar. El lugar geométrico de los puntos P para los que los tres punto A', B', C' están alineados es una cúbica (cúbica de Lemoine). / Applet CabriJava

104 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo arbitrario, B_a y C_a dos puntos sobre CA y AB, tales que $CB_a = BC_a = BC$. Probar que $OI \perp B_aC_a$ y $B_aC_a = 2 \cdot OI \cdot \operatorname{sen} A$, donde O es el circuncentro y I el incentro de $\widehat{ABC}$.

/ Applet CabriJava

105 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo, X_b y X_c los pies de las perpendiculares trazadas desde B y C a la bisectriz exterior en A; Y_c e Y_a los pies de las perpendiculares desde C y A a la bisectriz exterior en B; y, finalmente, Z_a y Z_b los pies de las perpendiculares desde A y B a la bisectriz exterior en C. Entonces, los puntos X_b, X_c, Y_c, Y_a, Z_a, Z_b están en una circunferencia de centro en el punto de Spieker (X_{10} en ETC).

Consideremos los puntos

$$B_a = X_cB \cap AC,\ C_a = X_bC \cap AB, \quad A_b = Y_cA \cap BC,\ C_b = Y_aC \cap BA, \quad A_c = Z_bA \cap CB,\ B_c = Z_aB \cap CA.$$

Entonces, $B_a, C_a, A_b, C_b, A_c, B_c$ están en una cónica.

Las rectas B_aC_a, A_bC_b y A_cB_c forman un triángulo perspectivo cona $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad en X_{37} en la Enciclipedia de Kimberling (ETC); éste es también el punto de intersección de las rectas B_aA_b, C_bB_c y A_cC_a.

Los puntos $B_aA_c \cap C_aA_b$, $C_bB_a \cap A_bB_c$ y $A_cC_b \cap B_cC_a$ son los vértices de un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de pespectividad en el baricentro de éste.

106 Sea un triángulo $\widehat{ABC}$, D un punto en BC y D' el conjugado armónico de D respecto a B y C, $L = AD \cap O(R)$ y $A' = LD' \cap O(R)$, sindo $O(R)$ la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$. Entonces, A' está en la simediana por el vértice A. / Applet CabriJava

107 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, sea I el centro de la circunferencia inscrita, T un punto de ésta y t su tangente en T. Las perpendiculares a IA, IB e IC por I cortan a t en A', B' y C', respectivamente. Entonces, las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes. / Applet CabriJava

108 Dados un triángulo $\widehat{ABC}$, un punto W y una recta ℓ en su plano, se consideran los puntos $D = AW \cap \ell$, $E = BW \cap \ell$ y $F = CW \cap \ell$. Entonces, para que los puntos $P_A = PD \cap BC$, $P_B = PE \cap CA$ y $P_C = PF \cap AB$ estén alineados (en la (W, ℓ)–recta de Simson-Wallace) es suficiente que P esté en la cónica circunscrita a $\widehat{ABC}$, que pasa por los puntos $A' = BF \cap CE$, $B' = CD \cap AF$ y $C' = AE \cap BD$.

Cuando $W = H$ es el ortocentro y ℓ es la recta del infinito se obtiene al recta de Simson-Wallace. / Applet CabriJava

109 Si los puntos que dividen cada lado de un triángulo en tres partes iguales se unen al correspondiente vértice opuesto, se forma un hexágono cuya área es la décima parte del área del triángulo.

Las tres diagonales son segmentos de las medianas del triángulo original.

El hexágono da lugar a dos triángulos de lados paralelos al original. / Applet CabriJava

110 Sean Δ el área de un triángulo, r y R los radios de sus circunferencias inscrita y circunscrita y $\overline{\Delta}$ el área del triángulo formado por los puntos de tangencia de su circunferencia inscrita, entonces $r\Delta = 2R\overline{\Delta}$.

111 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, desde un punto P se trazan tres rectas que forman con cada uno de sus lados el mismo ángulo θ; sean A_θ, B_θ y C_θ los puntos de corte de cada una de estas rectas con los lados BC, CA y AB. Determinar el área de $\widehat{A_\theta B_\theta C_\theta}$ y su relación con el área del triángulo pedal de P. / Applet CabriJava

112 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, sea D el pie de la altura desde A, P un punto arbitrario en AD, E el punto de intersección del lado AC con la recta BP y F el punto de intersección del lado AB con la recta CP, entonces las rectas DE y DF son simétricas respecto a AD.

Sean los puntos $G = PC \cap ED$ y $H = PB \cap FD$; y, construimos los puntos E' y F' donde cortan BG y CH a los lados AC y AB, respectivamente. Sean $P' = CF' \cap BE$, $P^* = EF' \cap E'F$. Probar que los puntos P' y P^* están sobre AD. ¿Es cierto para cualquier ceviana? / Applet CabriJava

113 Un punto P tiene coordenadas baricéntricas $(u : v : w)$, respecto a un triángulo $\widehat{ABC}$; entonces, el punto que tienen estas mismas coordenadas homogénea en la referencia $\{A, B, C; X\}$, cuando el punto unidad X recorre una recta d arbitraria que pasa por P, describe una recta d' que pasa por un punto fijo P', al variar d, y los puntos $d \cap d'$ determinan una cónica circunscrita a $\widehat{ABC}$ que pasa por P y P' y con tangente en P la recta PG (G baricentro de $\widehat{ABC}$). ¿Cuáles con las coordenadas baricéntricas de P'? / Applet CabriJava

114 El conjugado armónico del baricentro G de un triángulo $\widehat{ABC}$, respecto a los puntos dobles de la involución que las cónicas del haz con puntos base en los vértices e incentro I del triángulo dado, induce sobre la recta de Euler, es el X_{28} de la ETC. / Applet CabriJava

115 Los circuncentros de los cuatro triángulos que construyen cuatro rectas son concíclicos y los ortocentros están alineados. / Applet CabriJava

116 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, el triángulo formado por las polares de A, B y C, respecto a las hipérbolas equiláteras de ejes reales BC, BC y CA, respectivamente, es perspectivo con $\widehat{ABC}$. / Applet CabriJava

117 El lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a las circunferencias circunscrita e inscrita a un triángulo, está compuesto por dos elipses de focos en el circuncentro O y en el incentro I (su centro, punto medio de O e I, es el X_{1385} de ETC).

Si en una circunferencia de centro en un punto P de la circunferencia circunscrita y de radio igual al de la circunferencia inscrita, se consideran los puntos D y E, diametralmente opuestos y alineados con O, los puntos de intersección de las mediatrices DI y EI, están en una recta perpendicular a OI (dicha recta es la polar trilineal de X_{279} de ETC).

La envolvente de tales mediatrices son las elipses anteriores. / Applet CabriJava

118 Sobre los lados de un triángulo $\widehat{ABC}$ se construyen triángulos isósceles $\widehat{BCA'}$, $\widehat{CAB'}$ y $\widehat{ABC'}$, con ángulo en la base θ; sea $K(\theta)$ el punto de intersección de las rectas AA', BB' y CC' (centro de perspectividad de Kiepert) y consideremos el punto $K'(\theta)$ que tiene las mismas coordenadas baricéntricas homogéneas, respecto al triángulo de referencia $\widehat{ABC}$, que $K(\theta)$ respecto a $\widehat{A'B'C'}$. Entonces, dos de los puntos comunes de la envolvente de las rectas $K(\theta)K'(\theta)$ y la hipérbola de Kiepert tiene por coordenadas baricéntricas:

$$\left(\frac{1}{a^2 \pm bc \operatorname{sen} A} : \frac{1}{b^2 \pm ca \operatorname{sen} B} : \frac{1}{c^2 \pm ab \operatorname{sen} C}\right).$$

119 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, se considera la aplicación afín f que lleva $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$. Para todo punto X, sea el triángulo $\widehat{XYZ}$, donde $Y = f(X)$ y $Z = f(Y)$. Demostrar que el baricentro G de $\widehat{XYZ}$ es el mismo que el de $\widehat{ABC}$ y que las elipses circunscritas a ambos triángulos, con centro en el baricentro, son homotéticas, en una homotecia de centro en G; ¿cuál es su razón? / Applet CabriJava

120 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, sea la homología h_A de centro en A y eje BC y que tiene como homólogo del baricentro G el punto del infinito de la recta AG. La cónica homóloga de la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$ es la hipérbola circunscrita que contiene al simediano y es tangente en A a la circunferencia circunscrita. / Applet CabriJava

121 Sean un triángulo $\widehat{ABC}$ y D el pie de la altura de este triángulo trazada desde el vértice A. Sea P un punto de la recta AD, la recta BP interseca a CA en un punto E y la recta CP corta al lado AB en F. Probar que AD es la bisectriz del ángulo $\widehat{EDF}$. / Applet CabriJava

122 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, su triángulo tangencial y el triángulo ceviano del conjugado isogonal del punto de Clawson, son perspectivos. (Punto de Clawson: Centro de la homotecia entre los triángulos órtico y excentral). / Applet CabriJava

123 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo, P un punto y p su polar trilineal que corta a los lados BC, CA y AB en A', B' y C', respectivamente.

Las circunferencias de diámetros AA', BB' y CC' son coaxiales con eje e (pasando por el ortocentro). ¿Para qué puntos el eje e es la recta de Euler de $\widehat{ABC}$? / Applet CabriJava

124 Sean $\widehat{A'B'C'}$ y $\widehat{A''B''C''}$ dos triángulos inscritos en un triángulo $\widehat{ABC}$ y ℓ_a la recta paralela por A a la recta que une los puntos medios de $B'C''$ y $B''C'$. De forma análoga se trazan las rectas ℓ_b y ℓ_c; entonces las rectas ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c se cortan en un punto $\mathbb{S}$, denominado centro areal.

Se tiene que area $\widehat{\mathbb{S}A'A''}$ = area $\widehat{\mathbb{S}B'B''}$ = area $\widehat{\mathbb{S}C'C''}$. / Applet CabriJava

125 Dado un triágulo $\widehat{ABC}$, designemos por A_b y A_c los vértices opuestos a los B y C, respectivamente, del cuadrado (de centro A_e) levantado externamente sobre el lado BC y, de manera análoga, son designados los vértices B_c, B_a, C_a y C_b. Ocurre entonces que el triánguo $\widehat{A'B'C'}$, con vértices

$$A' = A_bC_b \cap B_cA_c, \qquad B' = B_cA_c \cap C_aB_a, \qquad C' = C_aB_a \cap A_bC_b,$$

tiene punto interior de Vecten coincidente con el punto exterior de Vecten de $\widehat{ABC}$ (éste es el centro de perspectividad de los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A_eB_eC_e}$). / Applet CabriJava

126 La circunferencia inscrita a un triángulo $\widehat{ABC}$ toca a sus lados BC, CA y AB en A_I, B_I y C_I. Sea F un punto del arco más pequeño determinado por A_I y B_I, y sea t_c la tangente en F, que corta a BC y CA en F_a y F_b. Probar que AF_a, BF_b, FC_I y A_IB_I son concurrentes. / Applet CabriJava

127 En un triángulo $\widehat{ABC}$ sean B_1 y C_1 los puntos de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{BCA}$ con CA y AB, respectivamente.

Sean V_a la intersección de B_1C_1 con BC y W_a la intersección de las bisectrices de los ángulos $\widehat{V_aC_1B}$ y $\widehat{V_aB_1C}$, demostrar que A, V_a y W_a están alineados. / Applet CabriJava

128 Dados un triángulo y un punto P, sean A_P, B_P y C_P los pies de las perpendiculares por P a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Determinar el lugar geométrico de P para que las paralelas por A_P, B_P y C_P a las cevianas AP, BP y CP, sean concurrentes. / Applet CabriJava

129 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, se Γ la circunferencia circunscrita y t_a su tangente en A; consideremos la circunferencia Γ_a (distinta de la circunferencia circunscrita Γ a $\widehat{ABC}$) que pasa por B y C y tangente a t_a. Procediendo cíclicamente, se definen las circunferencias Γ_b y Γ_c. Entonces, el centro radical de Γ_a, Γ_b y Γ_b es el centro de la hipérbola de Kiepert (hipérbola equilátera circunscrita que contiene al baricentro). / Applet CabriJava

130 Sea P un punto en la circunferencia circunscrita (de centro O) a un triángulo $\widehat{ABC}$. La perpendicular por P a OB corta en A_{ab} y en C_{ab} a los lados BC y BA, respectivamente. Establecer que existe una única posición A' de P, tal que A_{ab} es el punto medio de PC_{ab}.

Si la perpendicular por P a OC corta en A_{ac} y en B_{ac} a los lados CB y CA, se verifica también que cuando $P = A'$, A_{ac} es el punto medio de PB_{ac}.

A' es el punto en que la recta AK (K el simediano) vuelve a cortar a la circunferencia circunscrita. / Applet CabriJava

131 Supongamos dada una cónica y un punto U sobre ella. Entonces todas las cuerdas que se ven desde U bajo un ángulo recto pasan por un punto. (Teorema de Frégier) / Applet CabriJava

132 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto X sobre la recta BC,

(a) Inscribir una parábola en los lados del triángulo de manera que X sea el punto de tangencia con la recta BC.

(b) Demostrar que si Y, Z son los puntos de tangencia con los lados CA, AB y X', Y', Z' son los simétricos de X, Y, Z respecto de los puntos medios de BC, CA, AB, entonces las rectas AX', BY', CZ' son paralelas al eje de la parábola.

(c) Las rectas isogonales de AX', BY', CZ', es decir las rectas simétricas de estas rectas respecto de las bisectrices interiores AI, BI y CI, son concurrentes en el foco de la parábola. / Applet CabriJava

133 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo, P un punto y D, E y F los puntos en que las cevianas de P cortan a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sean los puntos $D' = AP \cap EF, E' = BP \cap FD$ y $F' = CP \cap DE$, $E_a = AE' \cap BC$, $F_a = AF' \cap BC$. Probar que:

$$\frac{CF_a}{F_aD} - \frac{CD}{DB} = \frac{BE_a}{E_aD} - \frac{BD}{DC} = 1.$$

/ Applet CabriJava

134 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo e I su incentro, consideramos sus triángulos pedal $\widehat{A_IB_IC_I}$ (triángulo de contacto interior), ceviano $\widehat{V_aV_bV_c}$ (de vértices los pies de bisectrices) y circunsceviano $\widehat{V_a'V_b'V_c'}$ (de vértices en los puntos donde las bisectrices vuelven a cortar a Γ). Coordenadas baricéntricas del centro radical de las circunferencias circunscritas a los triángulos $\widehat{A_IV_aV_a'}$, $\widehat{B_IV_bV_b'}$ y $\widehat{C_IV_cV_c'}$. / Applet CabriJava

135 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo, un punto P, $\widehat{P_aP_bP_c}$ su triángulo ceviano, $\widehat{P_a'P_b'P_c'}$ su triángulo circunsceviano y $\widehat{A_PB_PC_P}$ su triángulo pedal. Sean A', B' y C' los otros puntos en que las circunferencias circunscritas a $\widehat{P_aP_a'A_P}$, $\widehat{P_bP_b'B_P}$ y $\widehat{P_cP_c'C_P}$, cortan a la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$. Hallar el lugar geométrico que describe P para que las rectas AA', BB' y CC' sean concurrentes. / Applet CabriJava

136 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ de lados a, b y c, se traza la circunferencia inscrita; a ésta se le tira la tangente paralela al lado BC que determina un segundo triángulo $\widehat{AB_1C_1}$; con éste se reitera el trazado anterior, y así sucesivamente. Hallar la suma de las áreas de la sucesión infinita de los circunferencias inscritas.

137 Dados un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto P de su plano, se consideran las cónicas $\mathcal{C}_a$, $\mathcal{C}_b$ y $\mathcal{C}_c$ circunscritas al triángulo anticomplememtario $\widehat{A'B'C'}$ de $\widehat{ABC}$ (delimitado por las paralelas por los vértices de éste a sus lados opuestos), tales que las tangentes en B' y C' a $\mathcal{C}_a$ son paralelas a $A'P$, las tangentes en C' y A' a $\mathcal{C}_b$ son paralelas a $B'P$, y las tangentes en A' y B' a $\mathcal{C}_c$ son paralelas a $C'P$. Sean A^*, B^* y C^* los puntos (distintos de A', B' y C') de intersección de los pares de cónicas, $\mathcal{C}_b \cap \mathcal{C}_c$, $\mathcal{C}_c \cap \mathcal{C}_a$ y $\mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_b$, respectivamente.

Entonces, para cualquier P, las rectas $A'A^*, B'B^*$ y $C'C^*$ concurren en el anticomplemento de P (es decir, en el homotético de P en la homotecia de centro en el baricentro y razón $-3/2$).

El lugar geométrico de los puntos P, para que A^*, B^* y C^* estén alineados, es una cúbica circunscrita a $\widehat{ABC}$, de ecuación, en coordenadas baricéntricas:

$$x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) + 4xyz = 0.$$

/ Applet CabriJava

138 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ de circuncentro O, sean las dos circunferencias Γ_a^1 y Γ_a^2 que pasan por A y O y tienen su centro en la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$. La circunferencia Γ_a^1 vuelve a cortar a los lados AC y AB en A_b^1 y A_c^1, respectivamente; y Γ_a^2 en los puntos A_b^2 y A_c^2, resp.

De forma similar, se toman las circunferencias Γ_b^1, Γ_b^2, Γ_c^1 y Γ_c^2, así como los puntos correspondientes B_c^1 y B_c^2 en AB, B_a^1, B_a^2, C_a^1 y C_a^2 sobre BC, y C_b^1 y C_b^2 en el lado CA.

Entonces, las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes, siendo:

$$A' = A_b^1A_c^1 \cap A_b^2A_c^2, \qquad B' = B_c^1B_a^1 \cap B_c^2B_a^2, \qquad C' = C_a^1C_b^1 \cap C_a^2C_b^2.$$

Además, $\overline{A_b^1A_c^1} = \overline{A_b^2A_c^2} = \overline{BC} = a$, $\overline{B_c^1B_a^1} = \overline{B_c^2B_a^2} = \overline{CA} = b$ y $\overline{C_a^1C_b^1} = \overline{C_a^2C_b^2} = \overline{AB} = c$.

Las rectas $A_b^1A_c^1$ y $A_b^2A_c^2$ forma con el lado BC un triángulo equilátero; lo mismos ocurre con los pares de rectas $B_c^1B_a^1$ y $B_c^2B_a^2$, $C_a^1C_b^1$ y $C_a^2C_b^2$ con los lados CA y AB, respectivamente. / Applet CabriJava

139 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y punto P en su plano, sean A', B' y C' los puntos donde las cevianas AP, BP y CP cortan a las mediatrices a BC, CA y AC, respectivamente. Si M_a, M_b y M_c son los puntos medios de los lados BC, CA y AB (resp.), se consideran los puntos X, Y y Z que dividen a los segmentos $A'M_a, B'M_c$ y $C'M_c$ en una misma razón dada. Para que las rectas AX, BY y CZ sean concurrentes P a de estar en la hipérbola de Kiepert; se tiene, además, que el punto de concurrencia de tales rectas también está en dicha hipérbola.

/ Applet CabriJava

140 Dada una circunferencia Γ y un punto A (exterior) hallar la polar recíproca del lugar geométrico de los centros de los circunferencias circunscritas a los infinitos triángulos autopolares de vértice A, con respecto a la homológica de la circunferencia Γ, en la homología de centro A, eje la polar de A (resp. a Γ) y recta límite de la primera figura la tangente paralela a la polar de A, no comprendida entre este punto y su polar. Polar del punto A respecto a la homológica de la circunferencia. / Applet CabriJava

141 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo rectángulo en A. Tracemos sobre el interior de la hipotenusa $BQ = BA$ y $CP = CA$. Demostrar que $PQ^2 = 2BP \cdot QC$.

142 Sea $V_n = \sqrt{F_n^2 + F_{n+2}^2}$, donde F_n es la sucesión de Fibonacci ($F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$). Demostrar que V_n, V_{n+1}, V_{n+2} son los lados de un triángulo de área $1/2$.

143 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, denotamos por $\widehat{M_aM_bM_c}$ su triángulo medial y consideremos la cónica (parábola) $\mathcal{C}_a$, tangente a AB y a AC en B y C, respectivamente, y además pasa por el punto medio de M_bM_c; denotamos su foco por F_a. Entonces, la recta AF_a es la simediana por A. / Applet CabriJava

144 El triángulo $\widehat{ABC}$ es acutángulo. Sean AP y BQ bisectrices y AD y BE alturas; O e I son el circuncentro e incentro de $\widehat{ABC}$, respectivamente. Demostrar que P, O, Q están alineados si y solo si D, I, E están alineados.

145 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo. Sea N el punto de contacto de la circunferencia inscrita con AC. Sea MN el diámetro perpendicular a AC en la circunferencia inscrita. Sea L la intersección de BM con AC. Demostrar que $AN = LC$.

146 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, encontrar el punto en el lado BC de forma que la recta que une los pies de las perpendiculares a los otros lados de desde él sea paralela a BC. / Applet CabriJava

147 Sobre los lados de un triángulo cualquiera se construyen sendos cuadrados y se unen los vértices libres formando tres triángulos más. El área de cada nuevo triángulo es igual a la del triángulo original.

148 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo, entonces el cuadrilátero formado por las tres tangentes en sus vértices a su circunferencia circunscrita Γ y por la tangente a ésta en el otro punto en el que la altura por A corta a Γ, está inscrito en una circunferencia Γ_a.

Análogamente, se consideran las circunferencias Γ_b y Γ_c, asociadas a los vértices B y C. El centro radical de Γ_a, Γ_b y Γ_c es el punto X_{25} en la Enciclopedia de los Centros de un Triángulo (ETC) de Clark Kimberling.

Si ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c son los ejes radicales de Γ y Γ_a, Γ y Γ_b, Γ y Γ_c, respectivamente, entonces el triángulo tangencial de $\widehat{ABC}$ y el formado por las rectas ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c, son perspectivos con centro de perspectividad en X_{25}. / Applet CabriJava

149 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, consideremos los triángulos isósceles $\widehat{AB_aC_a}$, $\widehat{BA_bC_b}$, $\widehat{CB_cA_c}$, con $AB_a = AC_a = BC_b = BA_b = CA_c = CB_c$, B_a en la semirrecta AC, C_a en la semirrecta AB, C_b en la semirrecta BA, A_b en la semirrecta BC, A_c en la semirrecta CB y B_c en la semirrecta CA. Cuando las rectas B_aC_a, C_bA_b y A_cB_c concurren, lo hacen en el punto intermedio (Mittenpunkt, Middlespoint).

150 En un triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ con $\hat{A} = 60°$ y $\hat{B} = 30°$, sean D, E y F los puntos de trisección cercanos a A, B y C sobre os lados AB, BC y CA, respectivamente. Extendemos CD, AE yBF hasta intersecar a la circunferencia circunscrita en P, Q y R. Demostrar que $\widehat{PQR}$ es un triángulo equilátero.

151 Sea un triángulo $\widehat{ABC}$, sobre el lado AB se toman el punto A_c en la semirrecta con origen en A que no contiene a B y tal que $AA_c = BC$ y sobre el lado AC el punto A_b en la semirrecta con origen en A que no contiene a C tal que $CA_b = BC$; las rectas BA_b y CA_c se cortan en A'. Similarmente, procediendo de forma cíclica se obtienen los puntos B' y C', entonces A', B' y C' están alineados y las rectas AA', BB' y CC' concurren en el conjugado isotómico (X_{86}) del punto de Spieker (X_{10}).

Ahora tomamos puntos en el sentido contrario, es decir, sea A'_c sobre el lado AB en la semirrecta con origen en A que contiene a B tal que $BA'_c = BC$ y sobre el lado AC el punto A'_b en la semirrecta con origen en A que contiene a B tal que $CA'_b = BC$; las rectas BA'_b y CA'_b se cortan en A''. Similarmente, procediendo de forma cíclica se obtienen los puntos B'' y C'', entonces A'', B'' y C'' están alineados. Si A^{**} es el tercer punto diagonal (distinto de A y A'') del cuadrivértice $BCA'_bA'_c$, B^{**} es el tercer punto diagonal de $CAB'_cB'_a$ y C^{**} es el tercer punto diagonal de $ABC'_aC'_b$, entonces las rectas AA^{**}, BB^{**} y CC^{**} concurren en el punto X_{190} ("Yff parabolic point"). / Applet CabriJava

152 Si I y O son el incentro y circuncentro de un triángulo, las rectas simétricas de IO con respecto a los lados de los triángulos medial y de contacto interior pasan por el punto de Feuerbach. / Applet CabriJava

153 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo orientado y P un punto, se construyen los tres triángulos equiláteros directos $\widehat{PAA'}$, $\widehat{PBB'}$ y $\widehat{PCC'}$, luego los puntos medios U', V' y W' de $A'B$, $B'C$ y $C'A$ y los puntos medios X', Y' y Z' de $A'C, B'A$ y $C'B$. Entonces, $\widehat{U'V'W'}$ es un triángulo equilátero directo y $\widehat{X'Y'Z'}$ es un triángulo equilátero inverso.

Ahora, se construyen los tres triángulos equiláteros inversos $\widehat{PAA''}$, $\widehat{PBB''}$ y $\widehat{PCC''}$, luego los puntos medios U'', V'' y W'' de $A''B$, $B''C$ y $C''A$ y los puntos medios X'', Y'' y Z'' de $A''C, B''A$ y $C''B$. Entonces, $\widehat{U''V''W''}$ es un triángulo equilátero inverso y $\widehat{X''Y''Z''}$ es un triángulo equilátero directo.

El punto D, determinado por $GD : DP = 1 : 3$, es el centro de simetría de los pares de triángulos $\widehat{U'V'W'}$ y $\widehat{X''Y''Z''}$, $\widehat{U''V''W''}$ y $\widehat{X'Y'Z'}$. / Applet CabriJava

154 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, el punto A_c es tomado en la semirrecta BA tal que los segmentos BA_c y BC son iguales; el punto A_b es elegido en la semirrecta CA tal que los segmentos CA_b y BC son iguales. Puntos B_a, B_c y C_b, C_a son elegidos de forma similar. Probar que las rectas A_bA_c, B_cB_a y C_aC_b son paralelas. / Applet CabriJava

155 (Hyacinthos, Message #18704)

Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, inscribir un rectángulo $A_aA'_aA_bA_c$ en $\widehat{ABC}$, con $A_bA_c/A_cA_a = \rho$, estando A_b sobre AC, A_c sobre AB y $A_aA'_a$ queda en la recta BC.

Uniendo el punto medio D_a de $A_aA'_a$ con A, se obtiene la recta d_a. Repitiendo la construcción para los otros lados se obtienen las rectas d_b y d_c. Demostrar que las rectas d_a, d_b y d_c concurren en la hipérbola de Kiepert (hipérbola equilátera circunscrita a $\widehat{ABC}$, que contiene al baricentro y ortocentro). / Applet CabriJava

156 Dado el triángulo $\widehat{ABC}$, hallar el lugar geométrico de los puntos P tales que el ángulo $\hat{X}$ de su triángulo ceviano $\widehat{XYZ}$ es recto. Comprobar que el conjugado isogonal de dicho lugar geométrico es una cónica y construirla a partir del triángulo $\widehat{ABC}$.

/ Applet CabriJava

157 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo rectángulo con el ángulo recto en el vértice A, y P sobre BC. Sean I y J los pies de las perpendiculares trazadas por P a AB y AC. ¿Cómo debemos elegir P para que IJ sea mínimo? / Applet CabriJava

158 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto P, sean X, Y, Z los simétricos de los puntos P respecto a los lados del triángulo dado. Entonces las circunferencias circunscritas a $\widehat{XYC}$, $\widehat{YZA}$, $\widehat{ZXB}$ y $\widehat{ABC}$, se cortan en un punto común. / Applet CabriJava

159 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, un punto P y la homotecia de centro P y razón k, sean D, E y F los puntos en que la tripolar de P corta a los lados BC, CA y AB, respectivamente, $\widehat{A_kB_kC_k}$ el triángulo homotético de $\widehat{ABC}$, $\widehat{A_pB_pC_P}$ el triángulo determinado por las rectas AD, BE, CF y $\widehat{A_p^kB_p^kC_p^k}$ el triángulo determinado por las rectas A_kD, B_kE, C_kF. Entonces, el centro de perspectividad de los triángulos $\widehat{A_pB_pC_P}$ y $\widehat{A_p^kB_p^kC_p^k}$ describe, cuando k varía, una cónica circunscrita a $\widehat{A_pB_pC_P}$, que pasa por P. / Applet CabriJava

160 Si un punto P varía en la circunferencia circunscrita a un triángulo $\widehat{ABC}$, su polar trilineal y la polar respecto a la elipse circunscrita de Steiner, se cortan en los puntos de una cúbica circunscrita a $\widehat{ABC}$, con su punto doble en el simediano. / Applet CabriJava

161 Sean $\mathcal{C}_P$ y $\mathcal{C}_Q$ dos cónicas circunscritas a un triángulo $\widehat{ABC}$, de perspectores P y Q, respectivamente, y D el cuarto punto de intersección de estas cónicas. Supongamos que Q está en $\mathcal{C}_P$, entonces la recta PQ y la tangente en D a $\mathcal{C}_Q$ se cortan en un punto Q' sobre $\mathcal{C}_P$. / Applet CabriJava

162 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo y un punto D sobre el lado BC.

Por D trazamos paralelas a AC y a AB que cortan a AB y CA en los puntos C_a y B_a, respectivamente. Por B_a y C_a se trazan paralelas al lado BC, cortando éstas a la ceviana AD, en los puntos B'_a y C'_a, respectivamente. Por B_a y C_a se trazan paralelas a la ceviana AD que cortan cada una al lado BC, en los puntos D_{ab} y D_{ac}, respectivamente.

a) Probar que las rectas $B_aC_a, D_{ab}C'_a$ y $D_{ac}B'_a$ concurren en un punto X.

b) Si $Y_a = DC_a \cap D_{ac}B'_a$ y $Z_a = DB_a \cap D_{ab}C'_a$, entonces los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{XY_aZ_a}$ son homotéticos. Hallar el centro, X^*, y la razón de homotecia.

c) Lugar geométrico descrito por cada uno de los puntos X, Y_a y Z_a, cuando D varía sobre BC. / Applet CabriJava

163 En un triángulo $\widehat{ABC}$ cuyo ángulo en C es de $30°$, se construye sobre el lado AB un triángulo equilátero hacia el exterior. Demostrar que con los segmentos CA, CB y CD se puede construir un triángulo rectángulo. / Applet CabriJava

164 Si denominamos antisimediana al segmento conjugado isotómico de la simediana, es decir, el segmento cuyo pie es simétrico del pie de la simediana respecto del punto medio del lado, probar o refutar la siguiente proposición: ”Existen triángulos no isósceles con dos antisimedianas de la misma longitud ”.

165 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, se construyen sobre sus lados los siguientes rectángulos: ABA_bB_a con C sobre A_bB_a, BCB_cC_b con A sobre B_cC_b y CAC_aA_c con B sobre C_aA_c. Entonces, las rectas A_bA_c, B_cB_a y C_aC_b determinan un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$. / Applet CabriJava

166 Dados un triángulo $\widehat{ABC}$,un punto P y una recta ℓ, que pasa por P , que corta en A_b a la paralela por B a AC y en A_c a la paralela por C a AB; sea $A' = BA_c \cap CA_b$. Similarmente, procediendo cíclicamente, se definen los puntos B' y C'. Entonces, el triángulo determinado por las rectas AA', BB' y CC' es perspectivo con $\widehat{ABC}$; el centro de perspectividad, L, queda en ℓ. Cuando ℓ gira alrededor de P, L recorre una cúbica circunscrita a $\widehat{ABC}$, con punto doble en P. / Applet CabriJava

167 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, el circuncentro de un triángulo $\widehat{DEF}$ variable inscrito en $\widehat{ABC}$ y con el mismos baricentro que $\widehat{ABC}$, recorre una cúbica de punto doble en el circuncentro de $\widehat{ABC}$ y cuya dirección de su asíntota es la del punto Biham (X_{1499} en ETC). Si en vez de tomar los circuncentros, tomamos los simedianos, el punto del infinito de la correspondiente cúbica es el X_{523} (conjugado isogonal del foco de la parábola de Kiepert).

168 Las alturas de un triángulo $\widehat{ABC}$ se cortan en un punto H. Determínese el valor del ángulo $\widehat{BCA}$ sabiendo que $AB = CH$.

169 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo escaleno en el que una altura, una bisectriz interior y una mediana (cada una de las cevianas anteriores parten de un vértice distinto) son iguales. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $h_a = v_b = m_c$. Demostrar que las longitudes de los lados del triángulo $\widehat{ABC}$ cumplen la siguiente relación:

$$3a^4 + b^4 + c^4 - 3a^2c^2 - 2b^2c^2 = 0.$$

170 Construir sobre los lados BC, CA, AB de un triángulo $\widehat{ABC}$, exteriormente, los cuadrados $BCDE, ACFG, BAHK$, y construir los paralelogramos $FCDQ, EBKP$. Demostrar que APQ es un triángulo rectángulo isósceles. / Applet CabriJava

171 Sean una circunferencia y una elipse concéntricas, tal que el radio de la circunferencia es menor que la longitud de cada uno de los semiejes de la elipse. Por uno de los vértices de la elipse se trazan las tangentes a la circunferencia, que vuelven a cortar a aquella en puntos que determinan una recta tangente a la circunferencia. ¿Qué relación existe entre los semiejes de la elipse? / Applet CabriJava

172 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo no equilátero y AD, BE y CF sus alturas. Sobre las rectas AD, BE, CF, respectivamente, sean A', B', C' tales que $\dfrac{AA'}{AD} = \dfrac{BB'}{BE} = \dfrac{CC'}{CF} = k$. Encontrar todos los valores de k tales que $\widehat{A'B'C'} \sim \widehat{ABC}$ para todo triángulo $\widehat{ABC}$. / Applet CabriJava

173 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto P, los centros de las cónicas circunscritas a $\widehat{ABC}$, conjugadas isogonales de las rectas que pasan por P, están en la cónica que pasa por los puntos medios de los lados y por los pies de las cevianas de P^*, conjugado isogonal de P. / Applet CabriJava

174 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto P, sobre la ceviana AP se toma un punto L y se consideran las circunferencias circunscritas a $\widehat{ABL}$ y a $\widehat{ACL}$, que cortan a AC y a AB en B_a y C_a, respectivamente. Entonces, el punto de intersección de las rectas BB_a y CC_a recorre una recta ℓ_a, cuando L varía en AP.

Similarmente, se obtienen las rectas ℓ_b y ℓ_c, al hacer variar un punto en las cevianas de P por B y C, respectivamente. Se tiene que las tres rectas ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c son concurrentes. / Applet CabriJava

175 Sea P un punto en la circunferencia circunscrita a un triángulo $\widehat{ABC}$, consideremos los triángulos directamente semejantes $\widehat{CAB_a} \sim \widehat{BCP}$, $\widehat{ABC_b} \sim \widehat{CAP}$ y $\widehat{BCA_c} \sim \widehat{ABP}$. Entonces los puntos B_a, C_b y A_c están alineados y, si $U(u : v : w)$ son las coordenadas baricéntricas del conjugado isogonal de P $(u + v + w = 0)$, el punto del infinito de la recta que los contiene es:

$$U'(a^2u + c^2v + b^2w : c^2u + b^2v + a^2w : b^2u + a^2v + c^2w).$$

La transformación $U \mapsto U'$ es la involución que la hipérbola de Kiepert induce en la recta del infinito. La transformación $P \mapsto P'$ (P' conjugado isogonal de U') es la simetría respecto al eje de Brocard. / Applet CabriJava

176 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto D, sean los puntos E y F tales que los triángulos $\widehat{BCD}$, $\widehat{CAE}$ y $\widehat{ABF}$ son directamente semejantes. Entonces, existe una única recta d pasando por A tal que las rectas d, e y f son concurrentes, siendo e y f las rectas que recorren respectivamente los puntos E y F, cuando D varía sobre d.

177 Una recta paralela al lado BC de un triángulo $\widehat{ABC}$, corta en E y F a AC y AB, respectivamente. Sean O_a el circuncentro de $\widehat{AEF}$, E_a el punto medio de EB, F_a el punto medio de FC y G_a el baricentro de $\widehat{O_aE_aF_a}$. Entonces G_a recorre una recta ℓ_a, cuando EF varía. Procediendo cíclicamente sobre los lados de $\widehat{ABC}$, se obtienen las rectas ℓ_b y ℓ_c y las tres concurren en el punto de coordenadas baricéntricas:

$$\left(7a^4 + 4(b^2 - c^2)^2 - 11a^2(b^2 + c^2) : 7b^4 + 4(c^2 - a^2)^2 - 11b^2(c^2 + a^2) : 7c^4 + 4(a^2 - b^2)^2 - 11c^2(a^2 + b^2)\right).$$

/ Applet CabriJava

178 Sean P y Q dos puntos conjugados isogonales, respecto a un triángulo $\widehat{ABC}$, P_a y Q_a los pies de sus cevianas desde A, y ℓ_a la mediatriz de P_aQ_a. Procediendo cíclicamente, se consideran de forma similar las mediatrices ℓ_b y ℓ_c de P_bQ_b y P_cQ_c. ¿Cuál es el lugar geométrico de P para que el triángulo $\widehat{ABC}$ y el formado por las rectas ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c sean perspectivos?

179 Para un triángulo $\widehat{ABC}$, sean las bisectrices AD, BE, CF ($D \in BC, E \in CA, F \in AB$), verificándose $\widehat{EDF} = 90°$. Encontrar el valor del ángulo $\widehat{BAC}$. / Applet CabriJava

180 Dado un triángulo, determinar el lugar geométrico de los puntos cuyo triángulo ceviano tiene área constante.

181 En una cónica circunscrita a un triángulo $\widehat{ABC}$, las tangentes en los segundos puntos de intersección de las bisectrices con la cónica, forman un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$. / Applet CabriJava

182 Dados un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto P, sea $\widehat{A'B'C'}$ el triángulo simétrico de $\widehat{ABC}$ respecto a P. Los puntos de intersección (no en el infinito) de los lados de estos triángulos forman un hexágono inscrito y circunscrito a sendas cónicas. / Applet CabriJava

183 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo y P, Q dos puntos fijos. Las circunferencias circunscritas a $\widehat{ABC}$ y a $\widehat{APQ}$ se intersecan en A', además de en A. Similarmente, las circunferencias circunscritas a $\widehat{ABC}$ y a $\widehat{BPQ}$ se cortan en B' y las circunferencias circunscritas a $\widehat{ABC}$ y a $\widehat{CPQ}$ se cortan en C' (distintos de B y C).

Entonces los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son perspectivos. Expresar el centro de perspectividad en términos de las coordenadas baricéntricas de P y Q. / Applet CabriJava

184 Sean D, E, F los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita al triángulo $\widehat{ABC}$ con los lados BC, AC, AB. Las rectas DE y DF cortan a la paralela por A a BC en F_a y E_a, respectivamente. Probar que la recta de Euler del triángulo $\widehat{DF_aE_a}$ pasa por el punto de Feuerbach de $\widehat{ABC}$ (punto de tangencia de las circunferencias inscrita y de Euler). / Applet CabriJava

185 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo y $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$ sus circunferencias exinscritas. Sea α a circunferencia pasando por los puntos medios M_b y M_c de los lados AC y AB, respectivamente, y tocando internamente a Γ_a en el punto X. Similarmente se consideran las circunferencia β y γ tangentes internamente en los puntos Y y Z a las circunferencias Γ_b y Γ_c. Entonces, los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{XYZ}$ son perspectivos, con centro de perspectividad en el punto de coordenadas baricéntricas

$$\left((b + c - a)(b + c)^2 : (a - b + c)(a + c)^2 : (a + b - c)(a + b)^2\right).$$

186 La tripolar de un punto P respecto a un triángulo $\widehat{ABC}$, corta a sus lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F; las rectas paralelas a las cevianas AP, BP y CP por D, E y F, forman un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$.

187 Sean P un punto en la circunferencia circunscrita Γ a un triángulo $\widehat{ABC}$, p su tripolar (pasa por el simediano K), $L = AP \cap p, M = BP \cap p$ y $N = CP \cap p$.

Consideremos los centros A', B', C' (sobre la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$) de las semejanzas directas definidas por los pares de vectores homólogos $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{NL}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{LM}$. Entonces, los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son perspectivos, con centro de perspectividad Q en p.

Si P varía en Γ, Q describe una cuártica, con punto triple en K y tangente a Γ en los vértices de $\widehat{ABC}$.

188 Cuando dos triángulos son semejantes y homólogos a la vez y los pares de vértices homólogos en la semejanza lo son también en la homología, los centros de semejanza y homología son los puntos de intersección de las circunferencias circunscritas a los dos triángulos. / Applet CabriJava

189 Sea dado un triángulo $\widehat{ABC}$, denotamos respectivamente con O, I, H, G, K el circuncentro, el incentro, el ortocentro, el baricentro y el punto de Lemoine. Sean M el punto medio de AC y N el punto de intersección de la recta AB con la mediatriz de AC y sea Γ la circunferencia circunscrita al triángulo $\widehat{BNC}$. Probar que:

(1) el punto O pertenece a la circunferencia Γ

(2) el punto I pertenece a la circunferencia Γ si y sólo si: $A = 60°$

(3) el punto H pertenece a la circunferencia Γ si y sólo si: $(A = 60°)$ ó $(A = 120°)$ ó $(B = 90°)$ ó $(C = 90°)$

(4) el punto G pertenece a la circunferencia Γ si y sólo si: $a^4 - b^4 - c^4 + b^2c^2 = 0$

(5) el punto K pertenece a la circunferencia Γ si y sólo si: $2a^2 = b^2 + c^2$.

190 Sean D, E, F los pies de las cevianas de un punto P, respecto a un triángulo $\widehat{ABC}$; denotamos por A', B', C' los simedianos de los triángulos $\widehat{AFE}$, $\widehat{BDF}$ y $\widehat{CED}$, respectivamente. Entonces, las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes, en el conjugado isogonal del producto baricéntrico de P y su complementario. / Applet CabriJava

191 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ de circuncentro O y $\widehat{A'B'C'}$ su triángulo tangencial. Sean O_a, O_b y O_c los circuncentros de los triángulos $\widehat{AA'O}$, $\widehat{BB'O}$ y $\widehat{CC'O}$, respectivamente, y $D = BC \cap B'C'$, $E = CA \cap C'A'$ y $F = AB \cap A'B'$. Entonces, las rectas DO_a, EO_b y FO_c determinan un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$. / Applet CabriJava

192 Dados un triángulo $\widehat{ABC}$ y una recta d, sean los puntos $D = d \cap BC, E = d \cap CA$ y $F = d \cap AB$. Para un punto P sean los pies de sus cevianas $P_a = AP \cap BC, P_b = BP \cap CA$ y $P_c = CP \cap AB$ y las razones dobles $u' = (B\ C\ D\ P_a), v' = (C\ A\ E\ P_b)$ y $w' = (A\ B\ F\ P_c)$. El lugar geométrico que describe el punto P' de coordenadas baricéntricas $(u' : v' : w')$, cuando P varía sobre la recta d, es un cúbica circunscrita a $\widehat{ABC}$, que no depende de la recta d tomada.

193 Sean $\widehat{ABC}$, Γ su circunferencia circunscrita, de centro O, y $\widehat{A_IB_IC_I}$ el triángulo circunceviano del incentro I. La circunferencia que pasa por A y es tangente a la bisectriz BI en I, corta a AC en $B_a \neq A$ y a Γ en $B'_a \neq A$, entonces los puntos B_I, B_a y B'_a están en una misma recta b_a. Así mismo, la circunferencia que pasa por A y es tangente a la bisectriz CI en I, corta a AB en $C_a \neq A$ y a Γ en $C'_a \neq A$, entonces los puntos C_I, C_a y C'_a están en una misma recta c_a. Se verifica que el punto A' de la intersección de las recta b_a y c_a, está en la recta IO.

Procediendo cíclicamente, se definen de forma similar los puntos B' y C' (que están en la recta OI) y se tiene que las rectas AA', BB' y CC' se cortan en Γ.

194 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo no isósceles, O su circuncentro, H su ortocentro, D, E, F los pies de las alturas y H_A la intersección de AD y la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$. Consideremos los puntos L de intersección de OH_A y BC, M_a el punto medio de BC, P el punto de intersección de AM_a y la perpendicular por L a BC, Q la intersección de AD y la paralela por P a M_aH, $C_a = EQ \cap AB$ y $B_a = FQ \cap AC$. Sea ℓ_a la recta B_aC_a y, similarmente, se construyen las rectas $\ell_b = C_bA_b$ y $\ell_c = A_cB_c$, por permutación cíclica sobre los vértices de $\widehat{ABC}$.

Entonces las rectas ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c determinan un triángulo $\widehat{A'B'C'}$ perspectivo con $\widehat{ABC}$.

195 ¿Serán necesariamente iguales dos triángulos acutángulos e isósceles, que tengan el mismo radio de la circunferencia inscrita y también iguales los dos pares de lados "laterales"? / Applet CabriJava

196 El lugar geométrico de un centro del triángulo variable inscrito en un triángulo dado y semejante a éste, es una recta. / Applet CabriJava

197 Sean tres rectas no concurrentes p, q y r de direcciones diferentes, y sean dos segmentos de longitudes respectivas m y n. Determinar la reta secante, ℓ, que corte a las rectas p, q y r en los puntos D, E y F, respectivamente, de manera que $\overline{DE} = m$ y $\overline{DF} = n$. / Applet CabriJava

198 Se tienen tres circunferencias, Γ_1, Γ_2 y Γ_3; trazar los ejes radicales de otras circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ con cada uno de las otras tres primeras circunferencias y demostrar que de las intersecciones resultan dos triángulos homológicos. Hallar el centro y el eje de homología. / Applet CabriJava

199 Sea Γ la circunferencia circunscrita a un triángulo $\widehat{ABC}$; por el vértice A se traza una recta que corta al lado BC en M. Consideremos las circunferencias Γ_1 y Γ_2 con centros en Ω_1 y Ω_2 y radios ρ_1 y ρ_2 que son tangentes internamente cada una de ellas a Γ, al lado BC y a recta AM. Si 2θ el ángulo $\widehat{AMC}$ y r e I son el radio y centro de la circunferencia inscrita a $\widehat{ABC}$, probar que:

(1) La recta que une a Ω_1 y Ω_2 contiene también a I.

(2) El punto I divide al segmento en $\Omega_1\Omega_2$ en la razón $\mathrm{tag}^2\,\theta : 1$.

(3) $r = \rho_1 \cos^2\theta + \rho_2 \operatorname{sen}^2\theta$. / Applet CabriJava

200 Sean un triángulo $\widehat{ABC}$ y las parábolas $\mathcal{P}_+$ y $\mathcal{P}_-$ con el circuncentro como foco, la mediatriz de BC como eje y que pasan por B (también por C).

Consideramos una circunferencia Γ_a tangente a BC en un punto D y a la circunferencia circunscrita, con centro sobre una de las parábolas $\mathcal{P}_+$ o $\mathcal{P}_-$ y tangente a la circunferencia circunscrita. Sea A' el punto de corte de las tangentes trazadas desde B y C a Γ_a.

El lugar geométrico de A', cuando D varía sobre BC, es una cúbica que pasa por B y C, simétrica respecto a la mediatriz de BC. / Applet CabriJava

201 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo. Denotaremos por K, L y M, respectivamente, los puntos de intersección de las bisectrices interiores por A, B y C con los lados opuestos. Sea P un punto del perímetro del triángulo $\widehat{KLM}$ y X, Y y Z, respectivamente, los pies de las perpendiculares trazadas por el punto P a los lados BC, CA y AB. Probar que una de las tres distancias, PX, PY o PZ, es igual a la suma de las otras dos. / Applet CabriJava

202 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo, P un punto y $\widehat{DEF}$ el triángulo circunceviano de P; las circunferencias circunscritas a los triángulos $\widehat{BPF}$ y $\widehat{CPE}$ se cortan en un punto A' (distinto de P). Similarmente se definen B' y C'. Si P describe la hipérbola de Stammler (hipérbola de Feuerbach del triángulo tangencial) los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son perspectivos y el centro de perspectividad recorre la cónica biceviana de los conjugados isogonales de los centros de las hipérbolas de Kiepert y Jerabek. / Applet CabriJava

203 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto P, sea $\widehat{P_aP_bP_c}$ su triángulo ceviano. Se consideran los triángulos semejantes a $\widehat{ABC}$, $\widehat{AP_aC_{aa}}$, $\widehat{AP_bC_{ab}}$, $\widehat{AB_{aa}P_a}$, $\widehat{AB_{ac}P_c}$ y el punto $A' = C_{aa}C_{ab} \cap B_{aa}B_{ac}$; se definen de forma similar los puntos B' y C'. Encontrar el lugar geométrico de P para que los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ sean perspectivos.

/ Applet CabriJava

204 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, su cónica de MacBeath es la cónica inscrita con focos el circuncentro y el ortocentro. Los perspectores de la cónica de MacBeath respecto a todos los triángulos que tienen la mismas circunferencias circunscritas y de Euler que $\widehat{ABC}$ (todos tiene cónica de MacBeath común), están en una cónica con dos vértices en los centros de homotecia interior y exterior de las circunferencias de los nueve puntos y la de diámetro GH (circunferencia ortobaricéntrica). / Applet CabriJava

205 Sean $\widehat{ABC}$ y $\widehat{P_aP_bP_c}$ un triángulo y su triángulo ceviano de un punto P; consideremos los puntos A_{bc} simétrico de B respecto a C y A_{cb} simétrico de C respecto a B. La recta perpendicular a AP por P corta a los lados AB y AC en C_{ap} y B_{ap}, respectivamente. La recta perpendicular a AA_{bc} por C_{ap} y la perpendicular a AA_{cb} por B_{ap}, se cortan en un punto A_P.

1) Similarmente se definen B_P y C_P, procediendo cíclicamente. Entonces, si P está en la elipse circunscrita de Steiner o en la recta del infinito, las rectas AA_P, BB_P y CC_P son concurrentes en un punto P'. En el primer caso, P' está en la recta que pasa por los centros de las hipérbolas de Kiepert y Jerabek; en el segundo, P' describe la hipérbola de Kiepert.

2) Si en vez de tomar la perpendicular a AP por P, la tomamos por un punto variable X de AP, ella corta a los lados AB y AC en los puntos C_{ax} y B_{ax}, respectivamente. Entonces, la recta perpendicular a AA_{bc} por C_{ap} y la perpendicular a AA_{cb} por B_{ap}, se cortan en el punto A_X, que describe una recta ℓ_P que pasa por A y A_P.

3) En particular, si el triángulo $\widehat{ABC}$ es rectángulo en A ó isósceles de base BC, cuando $P = G$ (baricentro) la recta ℓ_G es la altura por A. / Applet CabriJava

206 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo con $\hat{B} = 2\hat{C}$ y $\hat{A} > 90°$. Sean D el punto de la recta AB tal que CD es perpendicular a AC, y M el punto medio de BC. Demuestrar que $\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$.

/ Applet CabriJava

207 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo, H su ortocentro y $\widehat{A'B'C'}$ su triángulo anticomplementario (precevino del baricentro). La parelela por H a BC corta a AB en C_a, a AC en B_a , a $A'B'$ en C'_a y a $A'C'$ en B'_a; la paralela por H a CA corta a BC en A_b, a BA en C_b , a $B'C'$ en A'_b y a $B'A'$ en C'_b; la paralela por H a AB corta a CA en B_c, a CA en A_c, a $C'A'$ en B'_c y a $C'B'$ en A'_c. Entonces, los cuadriláteros $B_cC_bB'_cC'_b$, $C_aA_cC'_aA'_c$ y $A_bB_aA'_bB'_a$ son concíclicos. / Applet CabriJava

208 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo, Γ_a la circunferencia que pasa por B y C y es tangente internamente a la circunferencia inscrita y similarmente, las circunferencias Γ_b y Γ_c. Designamos por P_a el punto de contacto de Γ_a y la circunferencia inscrita; similaramente, sean P_b y P_c. Sea Q_a el punto de concurrencia de las tangentes a la circunferencia inscrita en

P_b y P_c; y similarmente, Q_b y Q_c. Finalmente, sea T_a el punto de intersección de las rectas BP_c y CP_a; similarmente se definen T_b y T_c.

Entonces, los cuatro triángulos $\widehat{ABC}$, $\widehat{P_aP_bP_c}$, $\widehat{Q_aQ_bQ_c}$ y $\widehat{T_aT_bT_c}$ son perspectivos dos a dos. / Applet CabriJava

209 Hallar el ángulo $\widehat{ACB}$ (su valor numérico) sabiendo que $\widehat{ABC}$ es un triángulo isósceles con $AC = BC$ y que los segmentos AB, AD, DE, EF, FC son iguales, con D y F sobre BC, con el orden $CFDB$, y E sobre CA, con E interior. / Applet CabriJava

210 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, encontrar D sobre la recta BC, E sobre AC y F sobre AB, de manera que

$$AC^2 + CD^2 = AB^2 + BD^2, \quad BA^2 + AE^2 = BC^2 + CE^2, \quad CA^2 + AF^2 = CB^2 + BF^2.$$

Demostrar que las cevianas AD, BE y CF concurren.

211 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo, D el punto de intersección de la altura por A con la recta IM_a, que pasa por el incentro I y el punto medio M_a del lado BC. Similarmente, $E = BH \cap IM_b$ y $F = CH \cap IM_c$ (H el ortocentro).

Sean A' el simétrico de E respecto a A, B' el simétrico de E respecto a B y C' el simétrico de F respecto de C. Entonces, el triángulo $\widehat{A'B'C'}$ y el triángulo de contacto interior (sus vértices son los puntos de contacto con los lados de $\widehat{ABC}$ de la su circunferencia inscrita) son perspectivos. El centro de perspectividad es el punto de coordenadas baricéntricas:

$$\left(\frac{(b+c)(2a+b+c)}{b+c-a} : \frac{(b+c)(2a+b+c)}{b+c-a} : \frac{(b+c)(2a+b+c)}{(b+c-a)}\right).$$

/ Applet CabriJava

212 Sean un triángulo $\widehat{ABC}$ circunscrito a una cónica $\mathcal{C}$, t una tangente arbitraria a $\mathcal{C}$ y P_a el punto de contacto de BC con $\mathcal{C}$.

Consideremos las distancias $d_b = d(B,t), d_c = d(C,t), d_a = d(A,t)$ y $d_1 = d(P_a,t)$. Se cumple que:

$$\frac{d_b d_c}{d_a d_1}$$

es constante. / Applet CabriJava

213 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo, P un punto en su plano, A', B' y C' los pies de las cevianas de P sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente.

Las mediatrices de los segmentos PB' y PC' se cortan en O_a; las mediatrices de los segmentos PC' y PA' se cortan en O_b; y las mediatrices de los segmentos PA' y PB' se cortan en O_c.

Si el triángulo $\widehat{ABC}$ es acutángulo, el único punto P (distinto de A, B y C) sobre la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$ para el cual los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{O_aO_bO_c}$ son perspectivos es el centro X_{1300} de la Enciclopedia de Kimberling, y el centro de perspectividad de ambos triángulos es X_{254}.

214 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, hallar dos triángulos $\widehat{DEF}$ y $\widehat{GHI}$ tales que el simétrico de D respecto a E sea A, el simétrico de E respecto de F sea B y el simétrico de F respecto de D sea C y que el simétrico de G respecto a H sea A, el simétrico de H respecto de I sea C y el simétrico de I respecto de G sea B.

Hallar los lados de los dos triángulos $\widehat{DEF}$ y $\widehat{GHI}$ en función de a, b y c, lados de $\widehat{ABC}$. / Applet CabriJava

215 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y una recta paralela a BC que corta a las rectas AB y AC en D y E, respectivamente, colocar un P sobre DE y construir BE y PC. Llámese Q al punto de corte de estas dos rectas. Trazar AQ, que corta DE en R. Las razones en que dividen los puntos P y R al segmento DE verifican que $DR : RE = 1 + DP : PE$. / Applet CabriJava

216 Construir un triángulo conociendo el ortocentro y los pies de las bisectrices (interior y exterior) desde un vértice. / Applet CabriJava

217 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo no equilátero, $a = BC, b = CA$ y $c = AB$. Hallar el lugar geométrico $\mathcal{E}$ de los puntos M tales que $(b^2 - c^2)MA^2 + (c^2 - a^2)MB^2 + (a^2 - b^2)MC^2 = 0$. Demostrar que $\mathcal{E}$ contiene al centro de la circunferencia circunscrita y al centro de gravedad de $\widehat{ABC}$. Deducir un tercer punto de este conjunto.

218 Sean dados un recta a, un punto M_a sobre ella y dos puntos exteriores A y D.

Sobre la recta a se toma un punto variable X y su reflexión X', respecto a M_a.

Designamos por P el punto de intersección de las rectas AX y DX'.

1. Demostrar que el lugar geométrico de P al variar X sobre a es una cónica.

2. Hallar los puntos del infinito de la cónica y el lugar geométrico de D para que la cónica sea una hipérbola equilátera.

3. Hallar el lugar geométrico de los centros de esas hipérbolas equiláteras.

219 ¿Cuál es la envolvente de las rectas que bisecan a un triángulo?

220 Dados un triángulo ABC, un punto U y una cónica inscrita (C). Las otras tangentes desde los vértices del triángulo ceviano DEF de U cortan a las rectas EF, FD y DE en puntos alineados.

221 Sea ABC un triángulo, la circunferencia inscrita es tangente a los lados AB y AC en los puntos E y F, respectivamente. La recta EF corta a las bisectrices interiores en los vértices B y C en A_b y A_c, respectivamente.

Los puntos A_b y A_c están sobre la circunferencia de diámetro BC y la medida del arco A_bA_c es igual a la medida del ángulo en el vértice A.